51

~~J. XIII. 82.~~

Ma.

o 51.

J. XIII. 82. Siber Algebra. Jzgb mit Titel.

Anfangsgründe

der

Algebra, Geometrie

und

Trigonometrie

von

Thaddä Siber,

Professor der Physik, angewandten Mathematik und Chemie an dem Königl. Lyceum zu München.

BIBLIOTHECA CIVITATIS BAMBERGENSIS.

Mit drei Kupfertafeln.

Landshut, 1819.
in der Krüll'schen Universitätsbuchhandlung.

Vorerinnerung.

Man erwarte in diesem Werkchen keine neue, sondern nur eine leichtfaßliche Behandlung, keine tiefe philosophische Begründung, sondern nur die allerersten Anfangsgründe der Mathematik.

Es ist bestimmt zum Gebrauche in Gymnasien, und daher kann und soll es nur Vorarbeit für den künftigen philosophirenden und fortschreitenden Vortrag an Lyceen oder Universitäten seyn.

Sollte es aber dazu tauglich seyn, so müßte es nach der dermaligen Einrichtung kurz und leicht, und nach dem Bedürfnisse der Studierenden wohlfeil seyn.

Ich habe übrigens die auf eine Erfahrung von mehreren Jahren gegründete Ueberzeugung, daß dadurch Alles geleistet werden kann, was geleistet werden soll.

Ich sollte zwar meinen, daß es nicht schwer seyn würde, das Ganze in den beiden oberen Classen des Gymnasium's zu vollenden, ohne eben die Mehrzahl der Schüler zu übertreiben. Da aber der Mathematik die Stunden so sparsam zugetheilt sind, so kann füglich die Eintheilung auf 4 Jahre so getroffen werden, daß

im 1ten Jahre bis zu der Potenzlehre,
im 2ten — — — Geometrie,
im 3ten — — — Stereometrie fortgeschritten
und im 4ten das Ganze vollendet wird.

Ich setze voraus, daß man sich alle Jahre angelegen seyn läßt, das im vorausgegangenen Jahre Vorgetragene als Einleitung zu dem Vorzutragenden kurz zu wiederholen.

Mit praktischen geometrischen Aufgaben wollte ich das Werkchen nicht überhäufen, theils a) damit es nicht zu kostspielig würde, theils b) weil es dem Lehrer wahrscheinlich die Zeit nicht zulassen würde, dieselben auf dem Felde nachzuweisen, theils c) weil hier die Absicht nicht ist, praktische Geometer zu bilden, und endlich d) weil die höhern Lehren der Geometrie in ihrer Vollständigkeit und Anwendung ohnehin an Lyceen vorgetragen werden.

Mein ganzer Zweck ist daher erreicht, wenn ich durch diese kleine Schrift dazu beitrage, daß unsere Studierende mit derjenigen mathematischen Vorbereitung in die Lyceen übertreten, welche zur Auffassung der Vorträge über höhere und angewandte Mathematik erfordert wird.

München,
am 1. August 1818.

Siber.

Einleitung.

1. Mathematik ist die Wissenschaft von den Größen (scientia Quantorum).

2. *Größe* (Quantum) ist Alles, was eine gleichartige Mannigfaltigkeit in sich verbindet, woraus hervorgeht, daß jede endliche Größe eines Zuwachses, oder einer Verminderung fähig ist.

3. Größen sind entweder *verschieden* (diversa); oder *einerlei* (eadem), *gleichartig* (homogenea), oder *ungleichartig* (heterogenea).

4. Größen, welche einerlei Mannigfaltigkeit haben, heissen *gleich* (aequalia), welche aber nur einerlei Eigenschaften haben, heissen *ähnlich* (similia); Größen, welche sowohl der Mannigfaltigkeit, als den Eigenschaften nach einerlei sind, heissen *ähnlich und gleich* oder *congruent* (congruentia). Die Gleichheit drückt man aus durch $=$, die Aehnlichkeit durch $\backsim$, die Congruenz durch $\cong$.

5. Eine Größe heißt *stetig* (continuum), wenn das Mannigfaltige derselben so miteinander verbunden ist, daß die Endgrenze eines Theiles zugleich die Anfangsgrenze des andern ist, *discret* (discretum) aber, wenn das Mannigfaltige derselben getrennt ist.

6. Größen, welche einander entgegengesetzt sind, heissen positive und negative.

7. Der Gegenstand der Mathematik ist daher alles Meßbare, und ihre Theile sind:

a) Arithmetik, Zahlenlehre α) in gegebenen bestimmten (Zifferrechnung), oder β) in allgemeinen Ausdrücken (Buchstabenrechnung);

b) Algebra, die Lehre von der Auflösung der mathematischen Aufgaben durch Gleichungen;

c) Geometrie, die Lehre von der Ausmessung der Raumgrößen;

d) die Lehre von der Anwendung dieser Theile der Mathematik auf verschiedene Gegenstände, wodurch sie als angewandte Mathematik in eben so viele Theile zerfällt, als es Wissenschaften giebt, auf welche sie angewendet wird. Die allgemeinen Wissenschaften dieser Art sind:

A. Mechanik.

B. Optik.

C. Astronomie.

D. Architectur.

8. Die Erfindung der Algebra gehört, so viel uns bekannt, dem Diophantus von Alexandrien. Von seinen 16 Büchern „von arithmetischen Aufgaben" sind nur 13 auf uns gekommen, von verschiedenen Gelehrten herausgegeben und erklärt worden. Wir wissen nicht, um welche Zeit er gelebt habe, nur muß er vor dem V Jahrhunderte gelebt haben, weil die gelehrte Hypathia, welche am Anfange dieses Jahrhunderts gestorben ist, über seine Bücher geschrieben hat.

Von den Griechen erhielten die Araber die Algebra, unter welchen Muhamed Ben Moussa, und Thabet

Ben Corrah als die ältesten Algebraisten bekannt sind. Jener hat (nach Cardanus's Zeugniß) die Auflösung der quadratischen Gleichungen erfunden, dieser über die Gewißheit der Beweise algebraischer Rechnungen geschrieben, und die Algebra schon auf Geometrie angewendet. Ihnen folgte Omar Ben Ibraim, der ein Werk über die cubischen Gleichungen geschrieben.

Von den Arabern verpflanzte die Algebra im XV. Jahrhunderte Leonhardus von Bisa nach Europa, und sein Buch: „Summa arithmetica et geometria" ist das erste algebraische Werk, welches gedruckt worden ist. Es erschien 1494, 1523.

Die vorzüglichern Bearbeiter in dieser Zeit waren: Scipio Ferreo aus Bologna, Maria Antonio del Fiore (Florido), Tastaglia und Cardanus.

Besonders zeichnete sich aber Vieta (1590) aus, welcher zuerst den Gebrauch der Buchstaben zur Bezeichnung der Größen einführte, wodurch seine Algebra den Namen der speciosa erhielt, weil Alles durch Zeichen ausgedrückt war.

Nach Vieta war Wilhelm Oughterd der berühmteste Analyst, und Thomas Harriot erweiterte die bisherigen Kenntnisse um Vieles. Letzterer war auch der erste, welcher anstatt der großen Buchstaben die kleinern einführte.

Um eben diese Zeit (1614) machte Neper (Napier) seine äusserst wichtige Erfindung der Logarithmen bekannt.

Von da erweiterten sich die Grenzen der Algebra durch Descartes (1637), Fermant (1679), Brook Taylor, Wallis, Barrow u. aa. immer mehr.

Keine Entdeckung war aber wichtiger, als die der Differential- und Integral-Rechnung (1675) durch den unsterblichen Leibnitz, und beinahe gleichzeitig durch Newton.

Von da an gieng die Mathematik mit Riesenschritten auf der Bahn ihrer Erweiterung fort, und es würde zu lange seyn, alle die berühmten Männer Ozanam, Lamy, Euler, La Grange, Bernoulli, Kästner, Karsten, Tempelhof u. s. w. aufzuzählen, welche sich in diesem Felde unvergänglichen Ruhm erworben haben.

9. Die letzten Gründe, auf welchen alle Mathematik beruht, sind folgende für sich klare, und eben deßwegen unbeweißbare Sätze (axiomata):

a) Jede Größe ist sich selbst gleich.
b) Das Ganze ist größer, als seine Theile.
c) Das Ganze ist gleich der Summe aller Theile.
d) 2 Größen, die einer dritten gleich sind, sind sich selbst gleich.
e) Gleiche Größen um Gleiches vergrößert oder verkleinert bleiben sich gleich.
f) Jede Größe kann für eine ihr gleiche gesetzt werden.

Buchstabenrechnung.

1. Die Gesetze der Buchstabenrechnung sind ganz dieselben, welche der Zifferrechnung, deren Kenntniß nach allen ihren Theilen hier vorausgesetzt wird, zu Grunde liegen. Jene unterscheidet sich nämlich von dieser nur durch ihre Allgemeinheit, indem ein bestimmtes Zeichen der Zifferrechnung nur einer gegebenen Größe angehört, indessen ein Zeichen der Buchstabenrechnung

ein Buchstabe Alles vorstellen kann, was unter den Begriff einer Größe gebracht werden kann.

2. Wenn daher zwei allgemeine Größen a und b addirt werden sollen, so hat man diese Addition nur durch das Zeichen (+) anzuzeigen = a + b.

Zus. 1. Daß Ebendieses auch bei mehreren Größen geschehen müsse, fällt ohne Bemerkung in die Augen. Indessen läßt sich mancher Ausdruck dadurch vereinfachen, daß die gleichnamigen Ausdrücke wirklich addirt werden, z. B. $3a + 5a = 8a$.

Zus. 2. Wären daher die Summanten

$3x + 6a + 5b + 3y$ und $2x + 3a + 2b + 5y$ gegeben, so wäre die Summe $= 5x + 9a + 7b + 8y$.

3. Sollen hingegen zwei allgemeine Größen a und b von einander subtrahirt werden, so wird auch die Subtraction nur durch das Zeichen (—) angezeigt, als $a - b$.

Zus. 1. Gleichnamige Größen können auch hier wirklich subtrahirt werden, als $6a - 3a = 3a$, $5b - 2b = 3b$ u. s. w.

Zus. 2. Sollte daher von $5a + 6b + 5x + 3y$ subtrahirt werden $2a + 5b + 4x + 2y$, so würde die Differenz $= 3a + b + x + y$.

Zus. 3. Man sieht aber leicht, daß bei der wirklichen Subtraction einer zusammengesetzten Größe in der zu subtrahirenden Größe eine Veränderung der Zeichen nothwendig ist; denn, es sey gegeben $(6a + 2b) - (3a + b)$, so heißt dieses für die wirkliche Subtraction so viel, als: wenn von $6a + 2b$ zuerst $3a$ abgezogen ist, so soll auch noch b abgezogen werden, wodurch der obige Ausdruck übergeht in $6a + 2b - 3a - b = 3a + b$.

Wäre gegeben $(6a + 2b) - (3a - b)$, so sagt der Ausdruck, es soll nicht das ganze $3a$, sondern $3a + b$ weniger b abgezogen werden, wodurch entsteht $6a + 2b - 3a + b = 3a + 3b$.

* Beyspiele zur Uebung kann man überall antreffen, oder selbst erfinden.

4. Größen **multipliciren** heißt bekanntlich nichts Anderes, als eine Größe so und so **oft** nehmen, als es eine andere anzeigt. Man verbindet die beiden Größen (Factoren) a und b, um die Multiplication anzuzeigen, entweder durch das Zeichen $(\times)$ oder durch $(.)$, oder schreibt sie geradezu nebeneinander, als $a \times b = a \cdot b = ab$.

Zusatz 1. Sind die Zeichen der beiden Factoren positiv, wie $+a \times +b$, so heißt sie multipliciren, so viel, als das positive a positiv b mal nehmen, folglich muß das Produkt selbst positiv seyn $= + ab$.

Zusatz 2. Sind hingegen diese Zeichen negativ, wie $- a \times - b$, so heißt sie multipliciren, das negative a negativ b mal nehmen. Da nun ein Negatives negativ Nehmen soviel ist, als ein Positives positiv nehmen, so ist $- a \times - b = + a \times + b$, folglich gleichfalls $= + ab$.

Zusatz 3. Sind aber die Zeichen verschieden, wie $+ a \times - b$, so sagt der Ausdruck, es soll a negativ b mal genommen werden, folglich wird das Produkt $= - ab$.

Zusatz 4. Daher das allgemeine Gesetz: gleiche Zeichen geben bei der Multiplication $+$, verschiedene Zeichen $-$.

Zusatz 5. Sind mehrere Größen zu einem Ausdrucke mit einander verbunden, so ist's klar, daß sie alle

mit dem zweiten Factor multiplicirt werden müssen, wodurch z. B. $(x + y - a + b) c = cx + cy - ca + bc$ wird. Sind die beiden Ausdrücke zusammengesetzte Größen, so muß aus demselben Grunde jede einzelne Größe des einen Factors mit jeder einzelnen Größe des andern multiplicirt werden. Daher wird $(a + b - x) \times (c + d) = ac + bc - cx + ad + bd - dx$.

Zusatz 6. Soll eine Größe mehrere Male mit sich selbst multiplicirt werden, so nennt man das Produkt eine Potenz (Würde), und drückt die Anzahl der vorzunehmenden Multiplicationen + 1 der Kürze wegen durch eine zur rechten Seite über der Größe geschriebene Ziffer (Exponent) aus. So wird z. B. $a \times a = a^2$, $a \times a \times a = a^3$ u. s. w., und man sieht, daß die Multiplication gleichnamiger potenzirter Größen nur durch die Addition der Exponenten geschieht; denn $a^2 \times a^3 = a \times a \times a \times a \times a = a^{2+3} = a^5$ $b \times b^3 = b \times b \times b \times b = b^{3+1} = b^4$.

Zusatz 7. Da die Zahlen (Ziffer) nicht aufhören, den allgemeinen Gesetzen zu folgen, wenn sie mit Buchstabengrößen in der Multiplication (als Coefficienten) stehen, so dürfen auch sie als solche nur wie gewöhnlich die Zahlen multiplicirt werden. Daher wird

$$3a \times 5b = 15ab; \quad 5a \times -4b = -20ab.$$

5. Eine Größe a durch eine andere b dividiren, heißt eine dritte Größe q (Quotient) finden, welche, mit b multiplicirt, wieder die Größe a (dem Werthe und der Eigenschaft nach) giebt. Die Division wird entweder durch (:) oder bruchförmig ausgedrückt. Daher ist a dividirt durch $b = a : b = \frac{a}{b}$, welches die gewöhnlichste Art ist, Divisionen auszudrücken, wo eine wirkliche

Division entweder nicht sogleich möglich, oder zur Bestimmung der Aufgabe nicht zweckmäßig ist.

Zusatz 1. Sind die Zeichen der beiden Größen gleich, so wird auch hier das Zeichen des Quotienten positiv, oder $\frac{+a}{+b} = +q$, weil (per defin.) $a = bq$ seyn muß. Eben so wird $\frac{-a}{-b} = +q$, weil, wenn q negativ wäre, $-q \times -b = +bq$, folglich, obschon dem Werthe, doch nicht der Eigenschaft nach $= -a$ wäre.

Zusatz 2. Sind hingegen die Zeichen ungleich, wie $\frac{+a}{-b}$, so ist q negativ, weil, wenn q positiv wäre, $-b \times +q = -bq$, folglich nicht $= +a$ wäre. Eben dieses gilt von $\frac{-a}{+b} = -q$.

Zusatz 3. Also geben auch hier im Quotienten gleiche Zeichen +, ungleiche —.

Zusatz 4. Da $\frac{a^4}{a^2} = \frac{a^2 \cdot a^2}{a^2} = a^2 = a^{4-2}$, $\frac{a^5}{a^2} = \frac{a^3 \cdot a^2}{a^2} = a^3 = a^{5-2}$, und $\frac{a^6}{a^5} = \frac{a^5 \cdot a}{a^5} = a$ ist, so folgt, daß bei der Division gleichnamiger potenzirter Größen nur die Exponenten voneinander abgezogen werden müssen.

Zusatz 5. Die Ziffercoefficienten folgen, wie überall, also auch hier den allgemeinen Gesetzen. Daher ist $\frac{6a}{3b} = \frac{2a}{b}$; $\frac{8b}{2a} = \frac{4b}{a}$; $\frac{12b^4}{3b^2} = 4b^2$.

Zusatz 6. Besteht eine Größe (der Dividend) aus mehreren Gliedern, so muß nothwendig jedes einzelne Glied derselben durch den allgemeinen Divisor dividirt werden. Z. B.

$$(3dc + 6dc - 12d^2c^2) : dc = 3 + 6 - 12dc = 9 - 12dc.$$

Zusatz 7. Sind beide Größen zusammengesetzt, so folgt die Division natürlich denselben allgemeinen Gesetzen. Z. B.

$$(x^5 - 243 : x - 3) = x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 27x + 81.$$

$$\begin{array}{l}
x - 3 \\
\underset{-}{+} x^5 \underset{+}{-} 3x^4 \\
\qquad 3x^4 - 243 \\
\qquad\quad x - 3 \\
\qquad \underset{-}{+} 3x^4 \underset{+}{-} 9x^3 \\
\qquad\qquad 9x^3 - 243 \\
\qquad\qquad\quad x - 3 \\
\qquad\qquad \underset{-}{+} 9x^3 \underset{+}{-} 27x^2 \\
\qquad\qquad\qquad 27x^2 - 243 \\
\qquad\qquad\qquad\quad x - 3 \\
\qquad\qquad\qquad \underset{-}{+} 27x^2 \underset{+}{-} 81x \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 81x - 243 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x - 3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underset{-}{+} 81x \underset{+}{-} 243 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Algebra.

6. Die Wissenschaft von den allgemeinen Gesetzen der Reduction, Bildung, Natur, und Auflösung der Gleichungen, um durch sie die Aufgaben der Mathematik zu lösen, heißt Algebra.

Zusatz. Die Benennung (Algebra) kommt aus dem Arabischen von Aljahr und Almucabala, und bedeutet ursprünglich (nach Golius) Oppositionem und Comparationem, wodurch die Natur der Algebra sehr gut ausgedrückt wird.

7. Unter einer Gleichung (aequatio) versteht man aber die Zusammenstellung zweier verschiedener Ausdrücke einer und derselben Größe. Die Zusammenstellung geschieht durch das Zeichen $=$. Wenn ich daher z. B. wüßte, daß $c + a$ eben so groß ist, als $a - x$, so würde die Zusammenstellung dieser beiden Ausdrücke die Gleichung $c + d = a - x$ geben.

8. Der Zweck einer jeden Gleichung ist: das Unbekannte aus dem Bekannten zu finden. Läßt sich daher der Werth des Bekannten bestimmt auffinden, so heißt die Gleichung eine bestimmte. Sind aber mehrere Werthe einer und derselben unbekannten Größe möglich, so heißt sie eine unbestimmte. Die Gleichungen unterscheiden sich auch nach der Anzahl der unbekannten Größen, und endlich nach der Potenz, in welcher das Unbekannte steht.

Zusatz. Die Mathematiker sind übereingekommen, die unbekannten Größen mit den letzten Buchstaben des Alphabethes x, y, z zu bezeichnen.

9. Da der Zweck aller Gleichungen ist, das Unbekannte aus dem Bekannten zu finden (8), so müssen die Mittel dazu aufgefunden werden. Diese Mittel können aber keine andere seyn, als allgemeine Grundsätze, deren Richtigkeit erwiesen ist, und die schon oben (Einleitung 9.) aufgeführt worden sind.

10. Aus diesen Grundsätzen gehen für die Erlangung des Zweckes der Gleichungen folgende 2 allgemeine wichtige Regeln hervor:

a) Was auf einer Seite der Gleichung positive oder negative steht, kann mit veränderten Zeichen auf die andere Seite gebracht werden; denn es sey gegeben

$x + a - b = d$, so ist (Einl. 8. c)

$$x + a - b - a = d - a$$
$$x - b = d - a$$
$$x - b + b = d - a + b$$
$$x = d - a + b.$$

b) Was durch Multiplication und Division auf einer Seite steht, kann durch die entgegengesetzte Operation auf die andere Seite gebracht werden; denn es sey gegeben

$\frac{ax}{b} = d$, so ist (Einl. 9. e)

$$\frac{ax}{b} \cdot b = d \cdot b$$
$$\frac{ax}{a} = \frac{db}{a}$$
$$x = \frac{db}{a}.$$

Zusatz. Wenn also gegeben wäre

$\frac{cax}{db} + p - q = f$; und x gesucht würde, so wird

$$\frac{cax}{db} = f - p + q$$

$$cax = (f - p + q)\,db$$

$$x = \frac{(f - p + q)}{ca}\,db$$

$$= \frac{fdb - pdb + qdb}{ca}.$$

11. Soll nun eine gegebene Gleichung aufgelöset werden, so ist's nothwendig, daß das Unbekannte von allem Einflusse anderer Größen befreit, d. i. ganz allein auf einer Seite erhalten (isolirt), und daher nach Nro. 10. a. b. verfahren werde.

Zusatz. Ein subalternes Mittel dazu ist nicht selten die Auflösung in Factoren, welche immer angewendet werden muß, so oft das Unbekannte in mehreren Größen derselben Gleichung vorkömmt. Es sey z. B. gegeben

$bx + d - a = 2ax + b + a$, so ist (10)

$$bx - 2ax = b + a - d + a$$

$$= b + 2a - d,$$

und $bx - 2ax$ in die Factoren aufgelöst

$$(b - 2a)\,x = b + 2a - d$$

$$x = \frac{b + 2a - d}{b - 2a}.$$

12. Um Gelegenheit zur Uebung zu geben, setze ich hier einige Beyspiele von Gleichungen einer unbekannten Größe hieher.

a) Es soll die Zahl gefunden werden, von welcher der dritte Theil weniger dem achten Theile = ihrem fünften Theile + 16 ist.

$$x = 1920.$$

b) Ein Mensch ist a, ein anderer b Jahre alt, wie lange müssen sie leben, bis der erste gerade noch einmal so alt ist, als der zweite?

$$x = a - 2b.$$

c) Es bekomme Jemand für den Tag, den er arbeitet, a, müsse aber für jeden Tag, den er nicht arbeitet, b bezahlen. Nach 5 Tagen finde sich, daß Lohn und Strafe einander gleich sind. Wie viele Tage hat er gearbeitet?

$$x = \frac{5b}{a + b}.$$

d) Unter x Menschen werde eine Summe f vertheilt. Bekömmt einer a, so ist die Summe um p zu klein; bekömmt aber einer b, so ist sie um q zu groß, wie viele Menschen sind es?

$$x = \frac{p + q}{a - b}.$$

e) Ein Jüngling wurde gefragt, wie er die erhaltene Anzahl Gulden verwendet habe? Die Hälfte davon (war seine Antwort) habe ich für die Kost, $\frac{1}{4}$ für Bücher, $\frac{1}{7}$ für Ergötzungen ausgegeben, und 3 fl. habe ich noch. Wie viel hatte er erhalten?

$$x = 28.$$

f) Ein Dieb raubte einst eine Anzahl Edelsteine. Davon gab er die Hälfte dem ersten Kameraden, der ihm in den Weg kam. Dieser nahm aber die Hälfte nicht, sondern gab ihm 12 wieder zurück. Dem zweiten Kameraden gab er von dem, was er noch hatte, gleichfalls die Hälfte, aber auch dieser gab ihm 10 zurück. Dem dritten Kameraden gab er gleichfalls die Hälfte von dem, was er jetzt noch hatte, der sie auch bis auf 4 annahm. Als der Dieb seinen Raub nachzählte, fand

er, daß er nur noch die Hälfte davon habe. Wie viel hat er geraubt?

$$x = 32.$$

g) Es sollen 2 Sorten irgend einer Waare, deren Werthe m und n sind, zur Quantität q so vermischt werden, daß der Werth nur mehr p ist. Wie viel muß von der Sorte, deren Preis m ist, genommen werden?

$$x = \frac{q\,(p - n)}{m - n}.$$

13. Wenn mehr als eine unbekannte Größe vorkommt, so bleibt die Gleichung immer eine unbestimmte, so lange nicht eben so viele Gleichungen, als unbekannte Größen, gegeben, oder gefunden sind.

14. Um solche Gleichungen aufzulösen, haben wir drei Wege, nämlich: 1) die Substitution, 2) die Comparation, 3) die Addition und Subtraction (Elimination).

15. Die Substitution gründet sich auf den Satz: Gleiches kann für Gleiches substituirt werden; die Comparation auf den Satz: zwei Größen, die einer dritten gleich sind, sind sich selbst gleich; die Elimination auf den Satz: Gleiches zu Gleichen addirt, oder davon subtrahirt, ändert die Gleichheit nicht.

16. Die Substitution besteht darin, daß man in einer der gegebenen Gleichungen einen Werth für eine der unbekannten sucht, und ihn dann in den übrigen Gleichungen substituirt, wodurch man eine Gleichung von einer unbekannten Größe erhält, die man finden kann. Es seyen gegeben die zwei Gleichungen

I. $x + by = m$, und

II. $mx - dy = e$.

Suche ich nun in I. einen Werth für x, so ist

$$x = m - by,$$

substituire ich diesen in II., so erhalte ich eine Gleichung, in welcher nur mehr eine unbekannte Größe (y) vorkömmt. Es wird nämlich

$$mx = m(m - by) = m^2 - mby, \text{ folglich}$$
$$m^2 - mby - dy = e$$
$$m^2 - e = mby + dy$$
$$= y(mb + d), \text{ folglich}$$
$$y = \frac{m^2 - e}{mb + d}.$$

Wird der jetzt bestimmt in lauter bekannten Größen gefundene Werth von y in einer der vorigen Gleichungen substituirt, z. B. in $x = m - by$, so wird

$$x = m - b\left(\frac{m^2 - e}{mb + d}\right)$$
$$= m - \left(\frac{m^2b - be}{mb + d}\right)$$
$$= \frac{m^2b + md - (m^2b - be)}{mb + d}$$
$$= \frac{m^2b + md - m^2b + be}{mb + d}$$
$$= \frac{md + be}{mb + d}.$$

Zus. 1. Wären drei unbekannte Größen x, y, z mit den entsprechenden Gleichungen gegeben, wie

I. $y - 3x - z = a$

II. $2x + y + 2z = b$

III. $x + 2y + 2z = c$,

so suche man aus einer Gleichung (z. B. aus I.) einen Werth für irgend eine unbekannte Größe, z. B. y, so wird

$$y = a + 3x + z.$$

Wird dieser Werth in den übrigen Gleichungen (II und III.) substituirt, so wird aus II.

$$2x + a + 3x + z + 2z = b$$

$$\text{IV. } 5x + a + 3z = b.$$

Aus der Gleichung III. aber

$$x + 2(a + 3x + z) + 2z = c$$

$$x + 2a + 6x + 2z + 2z = c$$

$$\text{V. } 7x + 2a + 4z = c.$$

Wir haben also in IV und V. nur mehr 2 unbekannte Größen, und suchen daher aus einer derselben (z. B. aus IV.) einen Werth für eine unbekannte Größe, z. B. für x. Dieser wird

$$5x = b - a - 3z$$

$$x = \frac{b - a - 3z}{5}.$$

Substituiren wir diesen Werth in V., so wird

$$7\left(\frac{b - a - 3z}{5}\right) + 2a + 4z = c$$

$$\frac{7b - 7a - 21z}{5} + 2a + 4z = c$$

$$7b - 7a - 21z + 10a + 20z = 5c$$

$$7b + 3a - z = 5c$$

$$-3a - 7b + z = -5c.$$

$$\text{VI. } z = 7b - 5c + 3a.$$

Substi-

Substituiren wir diesen Werth von z in einer der Gleichungen von 2 unbekannten Größen (IV oder V.), so wird aus IV.

$$5x + a + 3(7b - 5c + 3a) = b$$
$$5x + a + 21b - 15c + 9a = b$$
$$5x + 10a + 21b - 15c = b$$
$$5x = b - 10a - 21b + 15c$$
$$\text{VII. } x = \frac{15c - 10a - 20b}{5}.$$
$$x = 3c - 2a - 4b.$$

Substituiren wir endlich die Werthe von z und x aus VI und VII. in einer der ursprünglichen Gleichungen, z. B. in I., so ist

$$y = a + 3x + z$$
$$y = a + 3(3c - 2a - 4b) + 7b - 5c + 3a$$
$$= a + 9c - 6a - 12b + 7b - 5c + 3a$$
$$= 4c - 2a - 5b.$$

Zus. 2. Auf eine ähnliche Weise lassen sich Gleichungen von 4 und mehr unbekannten Größen auflösen.

17. Die Comparation sucht aus jeder der gegebenen Gleichungen einen Werth für dieselbe unbekannte Größe. Dadurch entstehen Ausdrücke, welche diese Unbekannte nicht mehr enthalten. Werden nun diese in Gleichung gesetzt, so verschwindet wieder eine unbekannte Größe u. s. w., bis nur eine mehr übrig ist, die sich eben deßwegen leicht bestimmen läßt. Wiederholt man dieselbe Operation mit den übrigen unbekannten Größen, so erhält man sie alle nach einander. Es sey (wie oben Num. 16) gegeben

$$\text{I. } x + by = m, \text{ und}$$
$$\text{II. } mx - dy = e.$$

Sucht man aus beiden Gleichungen Werthe für x, so ist aus II.

$$x = \frac{e + dy}{m},$$

und aus I.

$$x = m - by, \text{ folglich}$$

$$m - by = \frac{e + dy}{m}, \text{ oder}$$

$$m^2 - mby = e + dy, \text{ folglich}$$

$$m^2 - e = dy + mby, \text{ und}$$

$$y = \frac{m^2 - e}{d + mb}.$$

Eben so findet man aus I.

$$y = \frac{m - x}{b},$$

und aus II.

$$y = \frac{mx - e}{d}, \text{ also}$$

$$\frac{m - x}{b} = \frac{mx - e}{d}$$

$$md - dx = bmx - be$$

$$md + be = bmx + dx$$

$$x = \frac{md + be}{bm + d}.$$

Zusatz. Wären 3 Gleichungen für 3 unbekannte Größen gegeben, so verfährt man auf dieselbe Weise. Wären die Gleichungen (wie oben 16. Zus. 1.)

I. $y - 3x - z = a$
II. $2x + y + 2z = b$
III. $x + 2y + 2z = c.$

Sucht man aus jeder Gleichung einen Werth für eine unbekannte Größe, z. B. für z, so ist

aus I. $z = y - a - 3x$,

aus II. $z = \frac{b - 2x - y}{2}$,

aus III. $z = \frac{c - x - 2y}{2}$.

Da jeder dieser Werthe $= z$ ist, so sind sie unter sich selbst gleich, also

IV. $y - a - 3x = \frac{b - 2x - y}{2}$,

V. $\frac{b - 2x - y}{2} = \frac{c - x - 2y}{2}$.

Daher wird aus IV.

$$2y - 2a - 6x = b - 2x - y$$
$$2y - 2a - b + y = 6x - 2x$$
$$3y - 2a - b = 4x$$
$$x = \frac{3y - 2a - b}{4},$$

aus V. aber

$$b - 2x - y = c - x - 2y$$
$$b - y - c + 2y = 2x - x$$
$$b - c + y = x.$$

Folglich weil $x = x$

$$\frac{3y - 2a - b}{4} = b - c + y, \text{ also}$$
$$3y - 2a - b = 4b - 4c + 4y$$
$$- 2a - b - 4b + 4c = 4y - 3y$$
$$y = 4c - 2a - 5b.$$

Um die andern zwei unbekannten Größen x und z zu finden, hat man auf dieselbe Weise, wie bei Auffin-

dung des y zu verfahren, oder die Substitution anzuwenden, von welcher wir oben gesprochen haben.

18. Soll eine Gleichung durch Addition oder Subtraction aufgelöset werden, müssen die Ausdrücke dazu gewöhnlich erst vorbereitet werden; denn die unbekannte Größe muß in beiden Ausdrücken denselben Coefficienten haben, und daher, wo sie ihn nicht hat, durch Multiplication zu demselben gebracht werden. Ist dieß geschehen, und hat die unbekannte Größe das nämliche Zeichen, so wird sie durch Subtraction, im Gegentheil durch Addition weggeschaft werden können.

Es seyen wieder die obigen Gleichungen gegeben

I. $x + by = m$, und

II. $mx - dy = e$.

Suchen wir durch die angegebene Methode y, so muß x weggebracht werden. Da aber x in II. den Coefficienten m, in I. aber nicht hat, so muß es auch in I. dazu gebracht werden, indem man die ganze Gleichung mit m multiplicirt. Dadurch wird

III. $mx + bmy = m^2$.

Da in II und III. x dasselbe Zeichen (+) hat, so müssen die Gleichungen von einander subtrahirt, aber eben darum in derjenigen, welche subtrahirt wird (z. B. II.), die Zeichen geändert werden. Es wird also

$$mx + bmy = m^2$$
$$-mx + dy = -e, \text{ folglich}$$
$$bmy + dy = m^2 - e, \text{ also}$$
$$y = \frac{m^2 - e}{bm + d}.$$

Dieser Werth von y könnte nun wohl in einer der gegebenen Gleichungen substituirt, und dadurch x gefunden werden. Um aber bei der angefangenen Methode

zu bleiben, muß, um x zu finden, y ausgestoßen werden. Es hat aber y in I. den Coefficienten b, in II. den Coefficienten d. Um daher den Coefficienten gleich zu machen, multiplicirt man I. mit d, II. aber mit b, wodurch man erhält

$$dx + bdy = dm$$
$$bmx - bdy = bc.$$

Da die Zeichen von y in den beiden Gleichungen ungleich sind, so muß addirt werden, wodurch man erhält

$$dx + bmx = dm + bc$$
$$x = \frac{dm + bc}{d + bm}.$$

Zusatz. Sind drei Größen, und (wie oben) drei Gleichungen gegeben

$$\text{I.}\quad y - 3x - z = a$$
$$\text{II.}\quad 2x + y + 2z = b$$
$$\text{III.}\quad x + 2y + 2z = c.$$

Da in I und II. y gleiche Coefficienten und gleiche Zeichen hat, so kann sogleich mit veränderten Zeichen subtrahirt werden, wodurch

$$y + 2x + 2z = b$$
$$-y + 3x + z = -a$$
$$\text{IV.}\quad 5x + 3z = b - a.$$

Da auch in II und III. y dasselbe Zeichen, aber in III. den Coefficienten 2 hat, so muß II. auf diesen Coefficienten gebracht, und dann subtrahirt werden. Es wird also

$$4x + 2y + 4z = 2b$$
$$-x - 2y - 2z = -c$$
$$\text{V.}\quad 3x + 2z = 2b - c.$$

Da in IV und V. x nicht dieselben Coefficienten hat, so muß, um x wegzuschaffen, IV. mit 3, V. mit 5

multiplicirt, und dann wegen der gleichen Zeichen subtrahirt werden, wodurch

$$15x + 9z = 3b - 3a$$
$$\pm 15x \pm 10z = \pm 10b \mp 5c$$
$$-z = -7b - 3a + 5c, \text{ oder}$$
$$z = 7b + 3a - 5c.$$

Auf eine ähnliche Weise findet man auch x und y.

19. Beyspiele zur Uebung:

a) In einem Krankenhause starben an demselben Tage 2 Greise, der eine A würde 110 Jahre gelebt haben, wenn zu seinen Jahren noch der 4te Theil von B's Jahren hinzukäme. B aber wäre 110 Jahre alt, wenn der 3te Theil von A zu seinen Jahren gerechnet würde. Wie alt waren sie?

Die Jahre von A = x = 90,
— — — B = y = 80.

b) 9 Kinder erbten 1700 fl., so, daß jeden Knaben 200 fl., jedes Mädchen 180 fl. trafen; wie viel waren Knaben (x), und wie viel Mädchen (y) darunter?

$$x = 4$$
$$y = 5.$$

c) In einer Stadt mußten von 250 Bürgern 1430 fl. bezahlt werden. Da traf jeden Kaufmann 8, jeden Handwerksmann 5 fl. Wie viel waren Kaufleute (x), wie viel Handwerksleute (y) in der Stadt?

$$x = 60$$
$$y = 190.$$

d) Zwei Lastthiere trugen eine verschiedene Anzahl Säcke. Würde dem ersten einer seiner Säcke abgenommen, und dem zweiten aufgelegt, so wäre ihre Last gleich. Würde aber dem zweiten einer genommen und

dem ersten aufgelegt, so trüge dieser noch soviel als der zweite. Wie viel trugen sie?

$$x = 7$$
$$y = 5.$$

e) Von 2 Größen x und y sind die Summe = S, und die Differenz = D bekannt. Welche sind diese Größen, vorausgesetzt, daß $x > y$ ist?

$$x = \frac{S + D}{2},$$
$$y = \frac{S - D}{2}.$$

f) Drei Freunde verloren all ihr Geld, und zwar A und B zusammen 10 fl., A und C zusammen 11 fl., B und C zusammen 9 fl. Wieviel verlor jeder?

$$A = x = 6$$
$$B = y = 4$$
$$C = z = 5.$$

g) Jemand kaufte 3 Pferde. Der Werth des ersten x, zur Hälfte des Werthes der beiden übrigen gerechnet, ist 25 Ducaten; der Werth des zweiten y, gerechnet zum dritten Theil der übrigen, 26 Ducaten; der Werth des dritten z, gerechnet zu der Hälfte des Werthes der übrigen, 29 Ducaten, was kostet jedes?

$$x = 8$$
$$y = 18$$
$$z = 16.$$

h) In einer Stadt beläuft sich das Militair x, der Adel y, und die Geistlichkeit z zusammen auf 9000 Köpfe. Wenn man von dem Adel das Militair abzieht, so erhält man die Hälfte der Geistlichkeit. Addirt man aber den 4ten und 8ten Theil der Geistlichkeit, so erhält

man die ganze Anzahl des Militairs, wie stark ist jede Classe?

$$x = 1500$$
$$y = 3500$$
$$z = 4000.$$

Proportionslehre.

20. Das Verhältniß (ratio) zweier Größen heißt die Art und Weise, wie eine aus der andern erzeugt werden kann. Es seyen diese Größen a und b und zwar $a > b$, so giebt es immer eine dritte Größe d, durch deren Subtrahirung von a die Größe b, oder durch deren Addirung zu b die Größe a hervorgeht, so daß

$$a - d = b$$
$$b + d = a \text{ wird.}$$

Es kann aber auch eine Größe a durch eine andere b dadurch erzeugt werden, daß b durch eine dritte m multiplicirt, oder b aus a dadurch erzeugt werden, daß a durch eine dritte m dividirt wird, so, daß

$$\frac{a}{m} = b$$
$$bm = a \text{ wird.}$$

21. Wird nun eine Größe aus der andern durch Addition oder Subtraction erzeugt, so heißt ihr Verhältniß zu einander ein arithmetisches. Wird aber eine Größe aus der andern durch Multiplication oder Division erzeugt, so ist ihr Verhältniß ein geometrisches. Die Größe d, welche im arithmetischen Verhältniß addirt oder subtrahirt werden muß, heißt die Differenz (sonst auch der Name) des Verhältnisses; die

Größe m hingegen im geometrischen Verhältniß, durch welche multiplicirt oder dividirt werden muß, der Exponent des Verhältnisses.

22. Die Gleichheit zweier Verhältnisse giebt eine Proportion, welche von der Gleichheit der Differenzen arithmetische, von der Gleichheit der Exponenten geometrische heißt.

23. Zwei gleiche Verhältnisse werden zu einer Proportion durch das Gleichheitszeichen (=) verbunden, so wie das Verhältniß selbst durch : angezeigt wird. Es giebt daher

$2 : 4 = 3 : 5$ eine arithmetische,

$2 : 4 = 8 : 16$ eine geometrische

Proportion, weil

$4 - 2 = 2$ und $5 - 3 = 2$, so, wie

$2 . 2 = 4$ und $8 . 2 = 16$ ist.

Allgemein also bilden die Ausdrücke

$$a : b = c : f$$

eine arithmetische Proportion, wenn zu a eben so viel addirt werden muß, um b zu geben, als zu c, um f zu erzeugen; hingegen eine geometrische, wenn a so oftmal genommen werden muß, um b zu erzeugen, als c um f zu geben.

24. Eine Proportion heißt eine stetige, wenn das 2te und 3te Glied derselben gleich sind, wie z. B. in

$2 : 4 = 4 : 6$ arithmetisch, oder

$2 : 4 = 4 : 8$ geometrisch, und

allgemein $a : b = b : c$.

Zusatz. Das Mittelglied 4 oder b heißt dann die (arithmetisch oder geometrisch) mittlere Proportionalgröße.

25. Zwei Größen stehen mit zwei andern im geraden Verhältniß (in ratione directa), wenn sie wachsen, wie diese, aber im umgekehrten Verhältniß (inversa), wenn diese wachsen, wie jene abnehmen. Im geraden Verhältniß z. B. stehen

arithmetisch $3 : 5 = 9 : 11$,

geometrisch $4 : 12 = 6 : 18$.

Im umgekehrten Verhältniß aber

arithmetisch $3 : 5 = 11 : 9$,

geometrisch $4 : 12 = 18 : 6$.

26. In der arithmetischen Proportion ist die Summe der zwei äußern Glieder = der Summe der beiden innern; denn wenn die gegebene Proportion $a : b = c : f$ ist, so wird, wenn die Differenz d, und $a > b$ ist

$$a = b + d$$

$$c = f + d, \text{ also}$$

$$b + d : b = f + d : f, \text{ folglich}$$

die Summe der Aeussern $= b + d + f$,

die Summe der Innern $= b + f + d$, und einander gleich.

Wäre $a < b$, so wird

$$a = b - d$$

$$c = f - d, \text{ also}$$

$$b - d : b = f - d : f, \text{ und}$$

$$b - d + f = b + f - d.$$

Zusatz 1. Umgekehrt stehen also 4 Größen auch in arithmetischer Proportion, wenn die Summe der ersten + vierten = der Summe der zweiten + dritten ist.

Zusatz 2. In einer stetigen arithm. Proportion ist daher die Summe der äussern Glieder = dem doppelten mittleren, oder, wenn

$a : b = b : c$, so ist

$a + c = b + b = 2b$.

27. Es läßt sich daher in einer arithmetischen Proportion, in welcher 3 Glieder bekannt sind, das 4te immer leicht finden; denn wenn

$a : b = c : f$, so ist

$a = b + c - f$

$b = a + f - c$

$c = a + f - b$

$f = b + c - a$.

Zusatz. In einer stetigen Proportion ist aber, wenn

$a : b = b : c$

$a = 2b - c$

$$b = \frac{a + c}{2}$$

$c = 2b - a$.

28. Die 4 Glieder bleiben daher auch nach verschiedenen Versetzungen so lange in arithmetischer Proportion, als die Summe der innern Glieder = bleibt der Summe der äussern. Wenn daher $a : b = c : f$, so ist auch

1) $b : a = f : c$
2) $c : a = f : b$
3) $a : c = b : f$
4) $c : f = a : b$
5) $f : c = b : a$,

weil bei allen diesen Veränderungen immer $a + f = c + b$ bleibt.

29. In der geometrischen Proportion ist das Produkt der innern Glieder = dem Produkte der äußern; denn, wenn die geometrische Proportion $a : b = c : f$ gegeben, und ihr Exponent m ist, so wird, wenn $a < b$

$$am = b$$

$$cm = f, \text{ also}$$

$$a : am = c : cm$$

$$a \times cm = c \times am, \text{ oder}$$

$$a \cdot f = c \cdot b.$$

Ist aber $a > b$, so wird

$$\frac{a}{m} = b,$$

$$\frac{c}{m} = f, \text{ folglich}$$

$$a : \frac{a}{m} = c : \frac{c}{m}$$

$$a \cdot \frac{c}{m} = c \cdot \frac{a}{m}$$

$$a \cdot f = c \cdot b.$$

Zusatz. In der stetigen geometrischen Proportion $a : b = b : c$ ist

$$ac = b^2, \text{ oder}$$

das Produkt der äussern Glieder = dem Quadrate des innern.

30. Wenn daher drei Glieder einer geometrischen Proportion gegeben sind, so läßt sich immer das vierte daraus bestimmen; denn es ist

$$a = \frac{bc}{f}$$

$$f = \frac{bc}{a}$$

$$b = \frac{af}{c}$$

$$c = \frac{af}{b}.$$

Zusatz. In einer stetigen geometrischen Proportion aber ist

$$a = \frac{b^2}{c}$$

$$c = \frac{b^2}{a}$$

$$b^2 = ac$$

$$b = \sqrt{ac}.$$

31. Man sieht leicht, daß, so lange für zwei Verhältnisse derselbe Exponent bleibt, oder, was daraus hervorgeht, so lange das Produkt der innern Glieder dem der äussern gleich ist, zwischen 4 Größen die Proportion bleibt. Daraus geht aber die Möglichkeit verschiedener Veränderungen der Größen hervor, ohne die Proportion zu ändern. Es wird daher, wenn die Proportion $a : b = c : f$ ist, dieselbe bleiben, wenn

a) permutando $a : c = b : f$

b) invertendo $b : a = f : c$

c) componendo $\begin{cases} a : b + a = c : f + c \\ a + b : a = c + f : c, \end{cases}$

d) differentiando
$$\begin{cases} a : a - b = c : c - f \\ a - b : b = c - f : f; \end{cases}$$

e) multiplicando
$$\begin{cases} ad : bd = c : f \\ ad : bd = cn : fn \\ ad : b = cd : f \\ a : bd = c : df, \end{cases}$$

f) dividendo
$$\begin{cases} \frac{a}{d} : \frac{b}{d} = c : f \\ \frac{a}{d} : \frac{b}{d} = \frac{c}{n} : \frac{f}{n} \\ \frac{a}{d} : b = \frac{c}{d} : f \\ a : \frac{b}{d} = c : \frac{f}{d}, \end{cases}$$

g) elevando ad potentias
$$\begin{cases} a^2 : b^2 = c^2 : f^2 \\ a^m : b^m = c^m : f^m, \end{cases}$$

h) extrahendo radices
$$\begin{cases} \sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{c} : \sqrt{f} \\ \sqrt[m]{a^n} : \sqrt[m]{b^n} = \sqrt[m]{c^n} : \sqrt[m]{f^n} \end{cases}$$

u. s. w.

32. Daß die gewöhnliche Regula de Tri (sowohl ordentliche als verkehrte), Gesellschaftsrechnung, Regula Quinque, Kettenrechnung u. dgl. nichts sind, als Anwendungen der geometrischen Proportion, sieht man leicht, und kann also die Begründung dieser praktischen Rechnungsarten, die ohnehin schon in der Ausübung bekannt sind, leicht finden.

33. Eben so sieht man leicht, daß jede Proportion sich in eine Gleichung verändern lasse; denn wenn arithmetisch $a : b = c : f$, so wird

$a + f = b + c$, oder

$a - b = c - f$, oder auch

$b - a = f - c$,

geometrisch $af = bc$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{f}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{f}{c}.$$

Zusatz. Umgekehrt kann jede Gleichung in eine Proportion aufgelöset werden; denn arithmetisch wird aus $a + d = b + c$

$a : b = c : d$,

geometrisch aus $bc = ad$

$a : b = c : d$,

aus $b^2 = cd$

$c : b = b : d$;

aus $(ax - x^2) = qp$

$a - x : p = q : x$.

Progressionslehre.

34. Mehrere Größen (Glieder, Termini,), von welchen jede zu der nachfolgenden einerlei Verhältniß hat, heißt eine Progression. Sie ist eine steigende, wenn die Glieder wachsen, umgekehrt eine fallende. Beide sind arithmetisch, wenn das Verhältniß ein arithmetisches, geometrisch, wenn das Verhältniß ein geometrisches ist. Die Differenz des arithmetischen Verhältnisses heißt auch hier die Differenz der arithmetischen Progression, der Exponent des geometrischen Verhältnisses aber der Nenner der geometrischen Progression. Es bilden daher 1, 3, 5, 7, 9 oder 2, 5, 8, 11 eine arithmetische Progression, und

2, 4, 8, 16 . . . . . . oder 3, 6, 12, 24

eine geometrische.

Zusatz 1. Es läßt sich daher jede arithmetische Progression durch die allgemeine Formul

$a,\ a + d,\ a + 2d,\ a + 3d\ \ldots$, und

jede geometrische Progression durch

$a,\ aq^1,\ aq^2,\ aq^3,\ aq^4\ .$ ausdrücken, wenn bei jener die Differenz $= d$, und bei dieser der Nenner $= q$ ist.

Zusatz 2. Da die Glieder so fortgehen, daß sich immer ein Glied zu seinem nachfolgenden verhält, wie dieses wieder zu dem nachfolgenden, so ist eine (arithmetische oder geometrische) Progression eine Reihe von Größen, welche in einer stetigen Proportion fortlaufen.

35. In einer arithmetischen Progression, in welcher $a =$ ersten Gliede, $n =$ Anzahl der Glieder,

d = Differenz, ist das $n$te Glied immer $= a \pm (n-1)d$; denn es sey

α) gegeben die steigende Progression

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d,$$

so ist z. B. das

3te Glied $a + 2d = a + (3-1)d$,
4te . . $a + 3d = a + (4-1)d$,
5te . . $a + 4d = a + (5-1)d$, also auch
$n$te . . $a + (n-1)d$.

β) Wäre hingegen gegeben die fallende Progression

$a,\ a-d,\ a-2d,\ a-3d$, so ist
das 3te Glied $a - 2d = a - (3-1)d$
4te . . $a - 3d = a - (4-1)d$
5te . . $a - 4d = a - (5-1)d$, also
$n$te . . $a - (n-1)d$, also allgemein

das $n$te Glied $= a \pm (n-1)d$.

36. Daher ist das letzte Glied w einer arithmet. Progression

$$= a \pm d(n-1).$$

Wäre z. B. die Progression 1, 3, 5, 7 gegeben, in welcher $d = 2$, $a = 1$ ist, so wird, wenn $n = 100$ ist, das letzte Glied
$w = a + (100-1)2 = 1 + 99 \cdot 2 = 1 + 198 = 199$.

Zusatz 1. Da $w = a \pm d(n-1)$, so wird, wenn w, d, n gegeben sind, das erste Glied

$$a = w \mp d(n-1).$$

Zusatz 2. Aus demselben Grunde, wenn a, w und n gegeben sind, die Differenz

$$d = \frac{\pm w \mp a}{n - 1}, \text{ und}$$

Zusatz. 3. Wenn a, w, d gegeben sind, die Anzahl der Glieder

$$n = \pm \frac{w \mp a}{d} \pm 1.$$

37. Wenn man eine arithmet. Progression rückwärts zu sich selbst addirt, so sind die einzelnen Summen zweier Glieder einander, und die ganze Summe aller Glieder der zwei addirten Progressionen der doppelten Summe S der gegebenen Progression gleich. Es werde nämlich zu

$a,\ a \pm d,\ a \pm 2d,\ a \pm 3d$ addirt

$w,\ w \pm d,\ w \pm 2d,\ w \pm 3d$, so erhält man $a + w,\ a + w,\ a + w,\ a + w$, und diese ganze Summe $= 2S$.

Zusatz 1. Wenn man daher die Summe des ersten und letzten Gliedes so oftmal nimmt, als die Progression Glieder hat (folgl. nmal), so erhält man die doppelte Summe (= S) aller Glieder. Es ist daher

$$2S = n\,(a + w), \text{ und}$$

$$S = (a + w)\frac{n}{2}, \text{ folglich}$$

Zusatz 2, wenn a, n, S gegeben sind

$$w = \frac{2S}{n} - a = \frac{2S - na}{n}, \text{ und}$$

Zusatz 3, wenn a, S und w gegeben sind,

$$n = \frac{2S}{a + w}.$$

Zusatz 4. Zugleich geht hieraus hervor, daß die Summe zweier von dem ersten und letzten Gliede gleichweit abstehender Glieder, und, wenn die Anzahl der Glieder eine ungerade Zahl ist, auch das doppelte mittlere Glied $= a + w$ ist.

38. Aus diesen (37) und den vorigen (36) Formeln ergeben sich neue; denn da

$$w = a \pm d(n - 1), \text{ so wird}$$

$$a + w = 2a \pm d(n - 1), \text{ folglich}$$

$$S = (a + w)\frac{n}{2} = \frac{n}{2}\left((2a \pm d(n - 1)\right)$$

$$= na \pm \frac{nd}{2}(n - 1)$$

$$= n\left(a \pm \frac{d}{2}(n - 1)\right)$$

$$a = \frac{2S \mp n(n - 1)d}{2n} = \frac{S}{n} \mp \frac{d}{2}(n - 1)$$

$$d = \frac{\pm 2S \mp 2na}{n(n - 1)} = \frac{2(\pm S \mp na)}{n(n - 1)}.$$

Wenn daher n, und von a, d, S zwei Größen gegeben sind, so läßt sich immer die dritte aus diesen Formeln finden.

39. Um zur Uebung Gelegenheit zu geben, setze ich einige Beispiele mit ihren Auflösungen hieher.

a) Wie viele Schläge macht eine Stundenuhr, während der Zeiger die ganze Peripherie durchläuft?

Aufl. 78.

b) Ein Pferd soll unter der Bedingung verhandelt werden, daß für den ersten Nagel 5 Groschen, für den zweiten 8, für den dritten 11 u. s. w., für jeden Nagel, deren Anzahl 32 ist, um 3 Groschen mehr bezahlt wird, wie viel kostet das Pferd?

Aufl. 82 fl. 8 Groschen.

c) Bei Ausgrabung eines Brunnens ist für den 1ten Fuß zu 4 Groschen, und für jeden folgenden um 3 Groschen mehr bedungen. Der Brunnen soll aber 20 Fuß tief werden. Was wird er kosten?

Aufl. 32 fl. 10 Groschen.

*) Wären um 4 Groschen mehr auf den Fuß bedungen, so würde er kosten 42 fl.

d) Setzen wir, es sey ein Brunnen von 12 Fuß Tiefe an einen Arbeiter um 19 fl. 10 Groschen verdungen, so, daß $d = 3$ ist. Nachdem nun dieser mit dem 8ten Fuße zu Ende gekommen, sey er gestorben; ein anderer Arbeiter übernehme nun denselben Vertrag in Rücksicht der 4 letzten Fuße. Wieviel trift den ersten? wieviel den zweiten?

Aufl. Den ersten trift 10 fl. 12 Groschen, den zweiten 8 fl. 18 Groschen.

40. Wenn in einer geometrischen Progression a, aq, aq^2, aq^3 der Nenner $= q$ das erste Glied $= a$ ist, so ist das nte Glied $= q^{n-1}a$; denn

das 2te Glied ist $aq = q^{2-1}a$,

3te . . . $aq^2 = q^{3-1}a$,

4te . . . $aq^3 = q^{4-1}a$ u. s. w.,

also allgemein

nte . . . $= q^{n-1}a$.

Zusatz 1. Wenn daher das letzte Glied w heißt, so wird auch, wenn die Anzahl der Glieder $= n$

$$w = q^{n-1} a, \text{ und}$$

Zusatz 2, das erste Glied $a = \frac{w}{q^{n-1}}$.

41. Da die Summe S einer geometrischen Progression nothwendig = der Summe aller Glieder ist, so wird

$S = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots aq^{n-1}$ und

$qS = aq + aq^2 + aq^3 + \ldots aq^{n-1} + aq^n$, folglich

$qS - S = q^n a - a$, also

$$S(q-1) = q^n a - a, \text{ und}$$

$$S = \frac{q^n a - a}{q-1} = \frac{(q^n - 1) a}{q-1}.$$

Zusatz 1. Daher wird auch

$$a = \frac{q-1}{q^n - 1} . S.$$

Zusatz 2. Da $q^n a = q \cdot q^{n-1} a$ ist, so wird, weil (40. Zus. 1.) $w = q^{n-1} a$ ist,

$qw = q^{n-1+1} a = q^n a$, also auch

$$S = \frac{qw - a}{q-1} \text{ und}$$

$$a = S - q(S - w)$$

$$w = \frac{a + (q-1) S}{q} \text{ und}$$

$$q = \frac{S - a}{S - w}.$$

Wenn daher von a, w, q, S drei gegeben sind, so kann man die vierte immer finden.

Zusatz 3. Für die Anzahl der Glieder n findet man Formeln durch die Anwendung der Logarithmen, so daß

$$n = 1 + \text{Log.}\ \frac{w}{a} : \text{Log.}\frac{S - a}{S - w}$$

$$= 1 + \text{Log.}\ \frac{w}{a} : \text{Log. } q.$$

42. Als Beispiele zur Uebung nur folgende:

a) Jemand kaufe ein Pferd, so, daß er für den ersten Nagel, deren 32 sind, 1 Heller, für den 2ten 2 Heller, und so immer für jeden folgenden Nagel das Doppelte bezahlt. Wie theuer wird das Pferd?

Aufl. 8947848 fl. 31 kr. 7 Hell.

b) Dem Erfinder des Schachspieles wurde von dem Könige in Persien eine Gnade angetragen. Er verlangte, man möchte ihm für das erste Feld 1 Weitzenkorn, für das zweite 2, und so für jedes nachfolgende Feld, deren bekanntlich 64 sind, das Doppelte geben. Wie viel betrug dieses?

Aufl. 18446744073709551615 Körner.

Anmerkung. Da auf ein englisches Schäffel 491510 Weitzenkörner gerechnet werden, das englische Schäffel aber zum Münchenerschäffel sich verhält = 1 : 8,43, so hätte diese Summe wenigstens 4415293752324 münchener Schäffel betragen.

Hätte der König auch alle Tage eine Million, das ganze Jahr hindurch also 365 Millionen Schäffel an den Erfinder geliefert, so wären doch über 12000 Jahre nothwendig gewesen, um Alles zu liefern.

Schlagen wir dieses Getreid zu Geld an, und setzen wir den Preis eines münchener Schäffels auf den geringen Werth von 10 fl., so würde die Forderung 44''152937'523240, also mehr als 44 Billionen Gulden betragen.

Welcher König wäre im Stande so ein Geschenk zu machen?

c) Ein Lottospieler hat sich vorgenommen auf eine Ziffer 20 Mal zu setzen, so, daß er in der ersten Ziehung 2, dann 4, dann 8 u. s. w. Kreuzer setzt. Wie viel muß er das 10te Mal, und wie viel im Ganzen setzen?

Aufl. Das 10te Mal setzt er 1024 kr. = 17 fl. 4 kr. und im Ganzen 227 fl. 20 kr., nach 20 Ziehungen aber 34952 fl. 30 kr.

Potenzenlehre.

43. Jede Größe, welche mit sich selbst multiplicirt wird, heißt eine Potenz (potentia) dieser Größe, welche man mit einer Ziffer, oder einem Buchstaben über der Größe zur rechten Hand geschrieben, welche man den Exponenten heißt, ausdrückt. So z. B. ist a^2, b^n, d^r der Ausdruck einer Potenz. Es erhalten aber die Potenzen ihren Namen α) von der Anzahl der Multiplicationen + 1, welche nothwendig wären, um eine bestimmte Potenz zu geben, oder, welches dasselbe ist, β) von der Größe, welche anzeigt, wie oft die zu potenzirende Größe neben einander gesetzt werden müßte. So ist z. B. die zweite Potenz $= a^2 = aa$, die dritte $= a^3 = aaa$ u. s. w.; denn es müßte, um a^2 zu geben, a mit sich selbst einmal multiplicirt werden, oder zweimal nebeneinander geschrieben werden.

Zusatz 1. Die erste Potenz einer Größe a ist daher die Größe selbst, und man versteht diese Potenz immer, wenn keine andere Potenz angezeigt ist.

Zusatz 2. Die zweite Potenz heißt man gewöhnlich das Quadrat, die dritte den Würfel (cubus), die vierte das Biquadrat der Größe.

Zusatz 3. Hieraus geht hervor, daß keine Potenz, deren Exponent eine gerade Zahl ist, negativ seyn könne.

44. Größen, welche einen verschiedenen Exponenten ihrer Würde haben, und verschiedene Größen, wenn sie schon denselben Exponenten haben, sind ungleichartig. Da aber Ungleichartiges sich nicht miteinander verbinden kann, so können solche potenzirte Größen auch nie miteinander zu Einem Ausdrucke durch Addition und Subtraction verbunden werden. Sollen daher a^3 und a^2, oder a^3 und b^3 zu einander addirt werden, so können sie nur durch die geeigneten Zeichen miteinander verbunden werden, als $a^3 + a^2$, $a^3 - a^2$, $a^3 + b^3$, $a^3 - b^3$.

Sind sie aber sowohl ihrer Größe als ihrer Potenz nach gleichartig, so können sie, wie andere Größen, zu einem Ausdruck verbunden werden, und es wird daher

$$3a^3 + 2a^3 = 5a^3$$
$$4b^4 - 2b^4 = 2b^4.$$

45. Sollen potenzirte Größen durch einander multiplicirt oder dividirt werden, so kann auch hier aus dem gegebenen Grunde bei ungleichartigen diese Operation nur angezeigt werden, und es wird daher

$$a^3 \times b^2 = a^3 b^2, \quad a^4 \times b^4 = a^4 b^4$$
$$a^3 : b^2 = \frac{a^3}{b^2}, \quad a^6 : b^6 = \frac{a^6}{b^6}.$$

Sind hingegen die Größen gleichartig, so können sie durch Addition der Exponenten multiplicirt, durch Subtraction derselben dividirt werden; denn

$a^3 \times a^2 = aaa \times aa = aaaaa = a^5 = a^{3+2}$

$a^4 : a^1 = \frac{aaaa}{a} = a^3 = a^{4-1}$.

Zusatz. Die Coefficienten in Zahlen hören auch hier nicht auf, den Gesetzen der Zahlen zu folgen, lassen sich also wie gewöhnlich durch einander multipliciren und dividiren. Daher wird

$$4a^3 \times 2b^2 = 8a^3b^2,\ 6a^3 \times 2a = 12a^4$$

$$\frac{4a^2}{2b^3} = \frac{2a^2}{b^3},\ \frac{8a^4}{2a^2} = 4a^2.$$

46. Da eine Potenz eine wiederholte Multiplication derselben Größe durch sich selbst ist, und der Exponent die Anzahl der nothwendigen Multiplicationen — 1 ausdrückt (43.), so wird eine Größe überhaupt dadurch zu einer bestimmten Potenz erhoben, daß sie so oft, als der Exponent — 1 anzeigt, mit sich selbst multiplicirt wird. Man erhält daher die zweite Potenz von a dadurch, daß man a 2 — 1 Mal mit sich selbst multiplicirt, oder $= a \cdot a = a^2$, und allgemein dadurch die mte Potenz von a, daß man a m — 1 Mal mit sich selbst multiplicirt.

Zusatz 1. Eben so leicht sieht man, daß, um eine schon potenzirte Größe zu einer andern Potenz zu erheben, man nur den ursprünglichen Exponenten mit dem neuen multipliciren müsse; denn soll a^2 zur dritten Potenz erhoben werden, so ist

$$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = aa \cdot aa \cdot aa = a^6$$

$$(a^3)^4 = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot = aaa \cdot aaa \cdot aaa \cdot aaa$$

$$= a^{12}$$ u. s. w.

Zusatz 2. Ist mit der allgemeinen Buchstabengröße auch eine Zahlengröße als Coefficient verbunden,

so muß offenbar auch dieser zu der geforderten Potenz erhoben werden, wodurch
$(2a)^2 = 4a^2$, $(3a)^3 = 27a^3$, $(2a^2b^3)^2 = 4a^4b^6$ wird.

47. Ist die Größe ein mehrgliederiger (polynomischer) Ausdruck, wie $a + b$, so wird die Erhebung zur Potenz entweder durch ( ), oder durch eine über die ganze Größe gezogene Linie angezeigt, wie $(a + b)^2$ oder $\overline{a + b}^2$, $(a + b)^m$ oder $\overline{a + b}^m$, um anzudeuten, daß nicht die einzelne Größe b, sondern der ganze Ausdruck $a + b$ zu der gegebenen Potenz erhoben werden soll.

Zusatz. Hieraus folgt für sich, daß

$$\left.\begin{array}{l}(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2\end{array}\right\} = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4.$$

48. Diese Weise, eine polynomische Größe zu einer gegebenen Potenz zu erheben, erfordert aber oft eine sehr lange Multiplication. Um diese zu vermeiden, und überhaupt die ganze Potenzirung auf ein allgemeines Gesetz zu bringen, ist für das Binomium eine allgemeine Formel entworfen worden, durch welche die Erhebung zu was immer für einer Potenz leicht wird. Diese Formel führt den Namen des Binomiallehrsatzes, dessen Erfindung man gemeiniglich dem großen Newton zuschreibt.

49. Um diese Formul gehörig aufzufinden, muß 1) auf die Anzahl der Glieder, 2) auf die Exponenten der Glieder a und b und 3) auf ihre Coefficienten Rücksicht genommen werden.

1) Was die Anzahl der Glieder betrift, so sieht man aus den (47. Zus.) aufgestellten Formeln, daß sie

bei $(a + b)^2 = 3 = 2 + 1$,
bei $(a + b)^3 = 4 = 3 + 1$,
bei $(a + b)^4 = 5 = 4 + 1$,
also allgemein
bei $(a + b)^m = m + 1$, oder
= dem Exponenten der Würde + 1
ist.

2) Wenn wir die Exponenten untersuchen, so finden wir (47.) bei

$(a + b)^2$ a, ab, b^2, also
für a die Exponenten 2, 1, 0,
für b — — 0, 1, 2,
bei $(a + b)^3$ a^3, a^2b, ab^2, b^3, also
für a die Exponenten 3, 2, 1, 0,
für b — — 0, 1, 2, 3,
bei $(a + b)^4$ a^4, a^3b, a^2b^2, ab^3, b^4
für a die Exponenten 4, 3, 2, 1, 0,
für b — — 0, 1, 2, 3, 4.

Daraus ergiebt sich für a

bei $(a + b)^2$ 2, 2 — 1, 2 — 2
bei $(a + b)^3$ 3, 3 — 1, 3 — 2, 3 — 3
bei $(a + b)^4$ 4, 4 — 1, 4 — 2, 4 — 3, 4 — 4.

Wäre daher der Exponent allgemein m, so würde die Exponentenreihe für a

bei $(a + b)^m = m, m - 1, m - 2, m - 3$ und so weiter, bis die Differenz = 0 wird.

Für b aber wächst der Exponent von 0 bis m. Nennen wir daher unterdessen die Coefficienten A, B, C, D u. s. w., so wird

$(a+b)^m = a^m + Aa^{m-1}b + Ba^{m-2}b^2 + Ca^{m-3}b^3 + Da^{m-4}b^4$, und so fort, bis der Exponent von $b = m$ wird.

Die Exponenten des ersten Theiles a nehmen also so ab, daß das erste Glied den Exponenten der Potenz zu seinem Exponenten hat, jedes darauffolgende Glied aber denselben Exponenten — der Anzahl der vorausgegangenen Glieder, bis die Differenz zwischen dem Exponenten und der Anzahl der vorausgegangenen Glieder = o wird.

Der Exponent des zweiten Theiles b wächst von dem 2ten Gliede an nach den natürlichen Zahlen so lange fort, bis er = m wird.

3) Betrachten wir auch die Coefficienten, so ist ihre Reihe

bei $(a+b)^2$ 1, 2, 1
bei $(a+b)^3$ 1, 3, 3, 1
bei $(a+b)^4$ 1, 4, 6, 4, 1.

Der Coefficient des ersten Gliedes also immer = 1. Von dem 2ten Gliede an gerechnet, sind aber die Coefficienten

bei $(a+b)^2$ 2, 1
bei $(a+b)^3$ 3, 3, 1
bei $(a+b)^4$ 4, 6, 4, 1.

Es ist aber $2 = \frac{2}{1}$ und $1 = \frac{2}{2}$, also werden die Coefficienten

bei $(a+b)^2$ $\frac{2}{1}, \frac{2}{2}$.

Eben so ist $3 = \frac{3}{1} = \frac{3}{1} \cdot \frac{3-1}{2}$, und

$$1 = \frac{3}{1} \cdot \frac{3-1}{2} \cdot \frac{3-2}{3},$$ also die

Coefficienten

bei $(a+b)^3$ $\frac{3}{1}$, $\frac{3}{1} \cdot \frac{3-1}{2}$, $\frac{3}{1} \cdot \frac{3-1}{2} \cdot \frac{3-2}{3}$.

Endlich ist $4 = \frac{4}{1}$

$$6 = \frac{4}{1} \cdot \frac{4-1}{2}$$

$$4 = \frac{4}{1} \cdot \frac{4-1}{2} \cdot \frac{4-2}{3}$$

$$1 = \frac{4}{1} \cdot \frac{4-1}{2} \cdot \frac{4-2}{3} \cdot \frac{4-3}{4},$$ also

bei $(a+b)^4$ $\frac{4}{1}$, $\frac{4}{1} \cdot \frac{4-1}{2}$, $\frac{4}{1} \cdot \frac{4-1}{2} \cdot \frac{4-2}{3}$,

$\frac{4}{1} \cdot \frac{4-1}{2} \cdot \frac{4-2}{3}$, $\frac{4}{1} \cdot \frac{4-1}{2} \cdot \frac{4-2}{3} \cdot \frac{3-3}{4}$,

also allgemein

bei $(a+b)^m$ $\frac{m}{1}$, $\frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2}$, $\frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3}$,

$\frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3}$ 2c. 2c.,

bis die abzuziehende Zahl $=$ m wird.

Das Gesetz, welchem die Coefficienten folgen, ist daher: Der Coefficient des ersten Gliedes ist $= 1$, der Coefficient des zweiten Gliedes $=$ dem Exponenten der Potenz, die darauffolgenden aber $=$ dem Produkte aus allen vorausgegangenen Coefficienten in den Exponenten der Potenz — der Anzahl der von dem 2ten Gliede an gerechneten Coefficienten, dividirt durch die Anzahl der vorausgegangenen Glieder.

Die bis hieher geführte Untersuchung über die Exponenten und Coefficienten eines Binomium's giebt daher folgende allgemeine Formel für $(a + b)^m$:

das I. Glied ist a^m,

II. . . . . $\frac{m}{1} . a^{m-1} b$,

III. . . . . $\frac{m . (m-1)}{1 . 2} . a^{m-2} b^2$,

IV. . . . . $\frac{m . (m-1) . (m-2)}{1 . 2 . 3} . a^{m-3} b^3$,

V. . . . . $\frac{m . (m-1) . (m-2) . (m-3)}{1 . 2 . 3 . 4} . a^{m-4} b^4$

u. s. w., bis der Exponent von $a = 0$, oder der Exponent von $b = m$ wird.

Zusatz. Bezeichnen wir, wie oben, die Coefficienten mit A, B, C, D u. s. w., so wird

I. . . $\frac{m}{1} = A$,

II. . $\frac{m}{1} . \frac{m-1}{2} = A . \frac{m-1}{2} = B$,

III. . $\frac{m}{1} . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} = B . \frac{m-2}{3} = C$,

IV. . $\frac{m}{1} . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} . \frac{m-3}{4} = C . \frac{m-3}{4} = D$ ꝛc.

Also läßt sich das Gesetz für die Coefficienten auch auf diese Art einfacher ausdrücken.

50. Ist der Exponent der Potenz eine gebrochene Zahl allgemein z. B. $= \frac{p}{n}$, so wird $m = \frac{p}{n}$. Es ändert sich also die obige Formel dahin um, daß der Coefficient

des I. Gliedes $= \frac{p}{n}$,

II. — $= \frac{p}{n} \cdot \frac{p-n}{2n}$,

III. — $= \frac{p}{n} \cdot \frac{p-n}{2n} \cdot \frac{p-2n}{3n}$,

IV. — $= \frac{p}{n} \cdot \frac{p-n}{2n} \cdot \frac{p-2n}{3n} \cdot \frac{p-3n}{4n}$,

oder wenn die Coefficienten A, B, C, D heissen,

I. $= \frac{p}{n} = A$,

II. $= A \cdot \frac{p-n}{2n} = B$,

III. $= B \cdot \frac{p-2n}{3n} = C$,

IV. $= C \cdot \frac{p-3n}{4n} = D$ u. s. w.

51. Wenn wir die (oben 47. Zus.) gegebenen Ausdrücke der Potenzen untersuchen, so ergiebt sich uns noch eine zweite bequeme Weise, den Binomiallehrsatz auszudrücken. Wenn wir nämlich ein Glied mit demjenigen Quotienten, der durch die Division des zweiten Theiles durch den ersten $\left(= \frac{b}{a}\right)$ erhalten wird, multipliciren, so erhalten wir (ohne Rücksicht auf die Coefficienten) immer das nachfolgende Glied. So erhalten wir z. B.

bei $(a+b)^3$ aus dem ersten Gliede a^3, und dem genannten Quotienten $\frac{b}{a}$

$$a^3 \cdot \frac{b}{a} = a^2 b = \text{II. Gliede, aus}$$
$$a^2 b \cdot \frac{b}{a} = ab^2 = \text{III. — —}$$
$$ab^2 \cdot \frac{b}{a} = b^3 = \text{IV.}$$

Nennen wir allgemein diesen Quotienten q, so wird jedes Glied = dem vorausgegangenen Gliede × q.

Nennen wir nun mit Beziehung auf das oben (49.) für die Coefficienten aufgefundene allgemeine Gesetz die Glieder α, β, γ, δ, ε 2c., so wird

für $(a+b)^m$

das I. Glied $= a^m = \alpha$

$$\text{II.} \; — = \frac{m}{1} \cdot \alpha \cdot q = \beta$$
$$\text{III.} \; — = \frac{m-1}{2} \cdot \beta \cdot q = \gamma$$
$$\text{IV.} \; — = \frac{m-2}{3} \cdot \gamma \cdot q = \delta$$
$$\text{V.} \; — = \frac{m-3}{4} \cdot \delta \cdot q = \varepsilon \text{ u. s. w.,}$$

für $(a+b)^{\frac{p}{n}}$ aber

das I. Glied $= a^{\frac{p}{n}} = \alpha$

$$\text{II.} \; — = \frac{p}{n} \cdot \alpha \cdot q = \beta$$
$$\text{III.} \; — = \frac{p-n}{2n} \cdot \beta \cdot q = \gamma$$
$$\text{IV.} \; — = \frac{p-2n}{3n} \cdot \gamma \cdot q = \delta \text{ u. s. f.}$$

Zusatz

Zusatz 1. Soll nun c + x zur Potenz ½ erhoben werden, so wird

I. Glied $= (c^2)^{\frac{1}{2}} = c^{\frac{2}{2}} = c$

II. — $= \frac{1}{2} c \cdot \frac{x^2}{c^2} = \frac{x^2}{2c}$

III. — $= \frac{1-2}{4} \cdot \frac{x^2}{2c} \cdot \frac{x^2}{c^2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{2c^3} = \frac{-x^4}{8c^3}$

IV. — $= \frac{1-4}{6} \cdot \frac{-x^4}{8c^3} \cdot \frac{x^2}{c^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{-x^6}{8c^5} = \frac{x^6}{16c^5}$

u. s. w.

Zusatz 2. Eben so wird

$2^{\frac{1}{2}} = (1+1)^{\frac{1}{2}} =$, wo $\alpha = 1$, $q = 1$, $\frac{p}{n} = \frac{1}{2}$ ist

$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{3}{48}$ u. s. w.

$3 = 1 + \frac{304}{768} \pm \ldots = 1,4 \ldots\ldots$

Zusatz 3. Man sieht, daß die angegebene Erhebung zu gebrochenen Potenzen beinahe immer nur beinahe gefunden wird, aber doch desto genauer, je länger man durch Aufsuchung der nachfolgenden Glieder die Operation fortsetzt.

Ich füge hier noch einige Arten hinzu, wie Potenzen verschieden, und, je nachdem es die Umstände fordern, bequemer ausgedrückt werden können.

1) $a^0 = 1$; denn

$$a^0 = a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = 1.$$

2) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$; denn

$$a^{-m} = a^{m-2m} = \frac{a^m}{a^{2m}} = \frac{1}{a^m};$$

3) $\frac{b}{a^{-m}} = b a^m$; denn

$$\frac{b}{a^{-m}} = b : a^{-m} = b : \frac{1}{a^m} = b \times \frac{a^m}{1} = b a^m.$$

Wurzellehre.

53. Diejenige Größe, welche durch Multiplication mit sich selbst eine Potenz giebt, heißt die Wurzel dieser Potenz. Man zeigt dieselbe durch das Zeichen $\sqrt{}$ an, und schreibt zwischen die Schenkel dieses Zeichens diejenige Zahl oder Größe, welche anzeigt, die wievielte Wurzel aus einer Größe ausgezogen werden soll, und welche der Exponent der Wurzel genannt wird. So sagt z. B. der Ausdruck $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[n]{b}$ u. s. w., es soll von a die dritte, von b die nte Wurzel genommen (ausgezogen) werden.

Zusatz 1. Man nennt auch hier die zweite Wurzel die Quadratwurzel, die dritte die Cubicwurzel.

Zusatz 2. Die Quadratwurzel wird gewöhnlich ohne Einschreibung des Exponenten 2 durch das Wurzelzeichen allein angezeigt, so, daß $\sqrt{a}$ schon die Quadratwurzel von a bedeutet.

54. Aus der Natur einer Wurzel (52.) folgt, daß sie der entsprechenden Potenz gerade entgegengesetzt ist,

also auch (im allgemeinen) durch die entgegengesetzte Operation gefunden werden müsse. Wie daher die Erhebung zu einer Potenz dadurch geschieht, daß der Exponent der Größe durch den Exponenten der Potenz multiplicirt wird, oder ohne Unterbrechung

a zum Quadrat dadurch erhoben wird, daß man den ursprünglichen Exponenten des a, welcher = 1 ist, mit dem Exponenten der Potenz = 2 multiplicirt, wodurch $a^{1 * 2} = a^2$ wird, so erhält man umgekehrt die Quadratwurzel aus a^2 dadurch, daß man den Exponenten von a, welcher = 2 ist, mit dem Exponenten der Wurzel = 2 dividirt. Daher wird

$$\sqrt{a^2} = a^{\frac{2}{2}} = a$$

$$\sqrt[3]{a^3} = a^{\frac{3}{3}} = a, \text{ und allgemein}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Zusatz 1. Eben deßwegen ist auch

$$\sqrt{a^2 b^2} = a^{\frac{2}{2}} b^{\frac{2}{2}} = ab$$

$$\sqrt{a^3 b^3} = a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{3}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{a^{\frac{2}{2}}}{b^{\frac{2}{2}}} = \frac{a}{b}$$

$$\sqrt{\frac{a^2 c^2 d^3}{b^4 c^5}} = \frac{a^{\frac{2}{2}} c^{\frac{2}{2}} d^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{4}{2}} c^{\frac{5}{2}}} = \frac{a c d^{\frac{3}{2}}}{b^2 c^{\frac{5}{2}}}, \text{ oder weil}$$

$$d^{\frac{3}{2}} = \sqrt{d^3},\ c^{\frac{5}{2}} = \sqrt{c^5}$$

$$= \frac{a c \sqrt{d^3}}{b^2 \sqrt{c^5}}.$$

4*

Zusatz 2. Eben so wird auch

$$ba^{-\frac{m}{n}} = \frac{b}{\sqrt[n]{a^m}}; \text{ denn } (52.\ 2.)$$

$$ba^{-\frac{m}{n}} = \frac{b}{a^{\frac{m}{n}}} \text{ und}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ folglich}$$

$$ba^{-\frac{m}{n}} = \frac{b}{\sqrt[n]{a^m}}.$$

Zusatz 3. Daher ist auch jede Wurzelgröße = einer potenzirten, deren Exponent eine gebrochene Zahl ist, welche den Exponenten der Größe zum Zähler, den Exponenten der Wurzel aber zum Nenner hat, so daß z. B.

$$\sqrt{(ax - x)} = (ax - x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[3]{(a + b)^2} = (a + b)^{\frac{2}{3}}.$$

55. Ist aber die Größe, aus welcher die Wurzel ausgezogen werden soll, eine polynomische, so ist die Operation etwas schwerer. Ich beginne mit der Ausziehung der Quadratwurzel.

Es ist aber (47. Zus.)

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Es besteht daher das Quadrat des Binomiums aus

a^2 = Quadrate des ersten Theiles,

$\pm 2ab$ = dem doppelten Produkte des ersten in den 2ten Theil, und

b^2 = dem Quadrate des 2ten Theiles.

Man sieht daher leicht, daß bei der Ausziehung der $\sqrt{}$ aus was immer für einer Größe diese 3 Theile aufgefunden werden müssen, welche zusammen das ganze Quadrat ausmachen. Es sey daher zu suchen die $\sqrt{}$ aus $a^2 - 2ax + x^2$, so ist dieselbe $= a - x$; denn da a^2 das Quadrat des ersten Theiles, so ist die $\sqrt{}$ derselben $= a$, folglich, wenn das Quadrat von a von dem ganzen Quadrate abgezogen worden, müssen noch die 2 andern Theile übrig seyn.

Man findet aber den II Theil, wenn man durch den doppelten I. dividirt $= x$. Und da endlich auch das Quadrat des II. Theiles enthalten ist, so muß auch dieses noch abgezogen werden, und daher die $\sqrt{} = a - x$:

$$\begin{array}{l} \sqrt{a^2 - 2ax + x^2} = a - x \\ -a^2 \\ \hline -2ax + x^2 \\ \quad 2a \\ \mp 2ax \pm x^2 \\ \hline \quad 0 \end{array}$$

Zusatz 1. Eben so ist

$$\sqrt{(16n^2 - 8pn + p^2)} = 4n - p$$
$$\sqrt{(9d^2 + 30d + 25)} = 3d + 5$$
$$\sqrt{(x^4 + 2x^2a^3 + a^6)} = x^2 + a^3;$$

Zusatz 2. Endet sich aber die Operation nach der Auffindung von Größen nicht, so ist dieses ein Beweis, daß die Wurzel nicht ein Binomium, sondern ein Polynomium ist. Man betrachtet daher die Summe des Quotienten als den ersten Theil, und verfährt, wie vorher, z. B. es werde gesucht die

$$\sqrt{}(a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4),$$

so wird sie $= a^2 + 2ab + b^2$

$$\pm a^4$$

$$4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(2a^2) + 2ab$$

$$\pm 4a^3b \pm 4a^2b^2$$

$$2a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$2a^2 + 4ab + b^2$$

$$\pm 2a^2b^2 \pm 4ab^3 \pm b^4$$

$$0$$

Zusatz 3. Eben so wird

$$\sqrt{}(a^4 + 6a^3b + 4a^2b^2 + 12ab^2 + 4b^4) = a^2 + 3ab - 2b^2$$

$$\sqrt{}(9c^2 - 12cdx + 4d^2x^2 + 24cfg - 16dxfg + 16f^2g^2)$$

$$= 3c - 2dx + 4fg.$$

56. Hieraus ist die Anwendung auf die Ausziehung der $\sqrt{}$ aus Zahlen begreiflich; denn da auch jedem Quadrate einer Zahlengröße die allgemeine Formel $a^2 \pm 2ab + b^2$ zum Grunde liegt, so wird auch die Ausziehung der $\sqrt{}$ aus ihr auf dieselbe Weise geschehen müssen. Setzen wir z. B. die Zahlengröße 34, so können wir sie in das Binomium $30 + 4$ zerlegen, und es ist

$$(a + b)^2 = (a + b)\,(a + b)$$

$$(30 + 4)^2 = (30 + 4)\,(30 + 4) = 34 \times 34 = 1156,$$

oder

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2)$$

$$(30 + 4)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 4 + 4^2$$

$$= 900 + 240 + 16 = 1156.$$

Zusatz 1. Indessen läßt sich dieses Verfahren immer abkürzen, woraus uns die Methode, welche wir sogleich angeben werden, hervorgeht.

Zusatz 2. Vorläufig muß man aber die Quadrate der ersten 9 Zahlen kennen, welche nebst ihren Würfeln und Biquadraten in der folgenden Tafel enthalten sind:

Wurzel	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrat	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubus	1	8	27	64	125	216	343	592	729
Biquadrat	1	16	81	256	625	1296	2401	4736	6561

57. Die Verfahrungsart bei der Ausziehung der $\sqrt{}$ aus Zahlen ist folgende:

1) Man theile die Zahl von der Rechten zur Linken in Classen, deren jede 2 Ziffern hat, bis für die letzte Classe zwei oder eine Ziffer bleiben, so hat die Wurzel so viel Ziffer, als Classen sind.

$54|22|84|96 = 7364$
$\underline{49 = a^2}$
522
$(14) = 2a$
$42 = 2ab$
$\underline{+9 = b^2}$
$\underline{429}$
9384
$(146) = 2a$
$876 = 2ab$
$\underline{+36 = b^2}$
$\underline{8796}$
58896
$(1472) = 2a$
$5888 = 2ab$
$\underline{+16 = b^2}$
$\underline{58896}$
0

nämlich

2) Man suche in der Tafel (56. Zus. 2.) das Quadrat der ersten Classe, oder das nächstkleinere, so ist die demselben entsprechende Wurzel die erste Ziffer der gesuchten Quadratwurzel.

3) Man ziehe nun dieses Quadrat von der ersten Classe ab, rücke zur Differenz die 2te Classe hinzu, duplire die gefundene erste Ziffer der Wurzel, setze dieses Duplum in eine Parenthese, so, daß die Einheiten desselben unter die erste Ziffer der zweiten Classe zu stehen kommen, dividire durch dasselbe die ober ihm stehenden Zahlen, und nehme den Quotienten als zweites Ziffer der verlangten V. Alsdann multiplicire man ihn durch den Divisor, und setze das Produkt so unter, daß seine Einheiten unter die erste Ziffer der zweiten Classe kommen. Ferner setze man das Quadrat des zweiten Ziffers so, daß die Einheiten unter die 2te Ziffer der 2ten Classe kommen, addire beide zusammen, und

4) subtrahire ihre Summe von den über ihr stehenden Zahlen, rücke zur Differenz die Ziffern der 3ten Classe, nehme das Duplum der beiden gefundenen Ziffer, dessen Einheiten unter die erste Ziffer der 3ten Classe kommen, wieder zum Divisor der über ihm stehenden Zahlen, den Quotienten aber zur dritten Ziffer der verlangten V. Alsdann verfahre man wieder wie oben, bis alle Classen herabgesetzt worden sind.

5) Bleibt am Ende kein Rest, so ist die gegebene Zahl ein vollkommenes Quadrat. Bleibt aber ein Rest, so ist sie ein unvollkommenes, und es muß zu der gefundenen ganzen Zahl noch ein Bruch (Decimalbruch) hinzukommen. Man findet denselben dadurch, daß man der Größe beliebig viele Paare von Nullen als Decimalen anhängt, und die Ausziehung fortsetzt. Dadurch erhält

man in der Wurzel so viele Decimalen, als man Paare von Nullen in Rechnung gebracht hat, und die Wurzel um so genauer, je länger man die Operation fortsetzt, z. B.

$\sqrt{15|96|24} = 399,522 \ldots$

± 9

696

(69)

± 621

7524

(789)

± 7101

42300

(7985)

± 39925

237500

(79902)

± 159804

7769600

(799049)

± 7191441

578159 rc. rc.

Zusatz 1. Da so eine Ausziehung der √ ohne Ende fortgehen, die √ also zwar der wahren √ immer näher kommen, aber sie doch nie vollkommen darstellen würde, so zeigt dieß, daß die gegebene Größe kein vollständiges Quadrat ist, oder, welches dasselbe ist, daß es keine Zahl giebt, die durch sich selbst multiplicirt 159624 zum Produkte geben kann.

Zusatz 2. Da jede Wurzelgröße = einer potenzirten mit dem entsprechenden gebrochenen Exponenten ist (54. Zus. 3.), so ist jede Wurzelausziehung auch = einer Erhebung der Wurzelgröße zu der geeigneten gebrochenen Potenz. Deßwegen dient die oben (50. 51.) gegebene Formel auch zur Ausziehung aller Wurzel.

58. Oft geschieht es, daß ein unvollkommenes Quadrat gegeben wird, welches ergänzt (complirt) werden soll, um aus dem Complirten die $\sqrt{}$ ausziehen zu können. Ein leichtes Raisonnement, gestützt auf den Satz, daß $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, wird hier zum Zweck führen.

Es sey z. B. gegeben das unvollkommene Quadrat $x^2 + ax$, so haben wir x^2 = dem Quadrate des ersten Theiles, und ax = einem Produkte aus dem ersten in den zweiten Theil. Betrachten wir aber ax als das doppelte Produkt des ersten in den zweiten Theil, so muß $\frac{a}{2}$ = dem 2ten Theile, und $\frac{a^2}{4}$ = dem Quadrate deßelben, folglich das ergänzte Quadrat

$$= x^2 + ax + \frac{a^2}{4} \text{ seyn.}$$

2) Aus ähnlichen Gründen wird von $x^2 + cx - 6x$ der 2te Theil $= \frac{c-6}{2} = \frac{c}{2} - 3$, folglich sein Quadrat $= \frac{c^2}{4} - 3c + 9$, und das ergänzte Quadrat

$$= x^2 + cx - 6x + \frac{c^2}{4} - 3c + 9.$$

3) Eben so ist von $n^2 + \frac{2an}{d} - n$ der 2te Theil $= \frac{a}{d} - \frac{1}{2}$, das ergänzte Quadrat also

$$= n^2 + \frac{2an}{d} - n + \frac{a^2}{d^2} + \frac{1}{4}.$$

4) Also auch von $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}ax$ das ergänzte Quadrat

$$= x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{9} - \frac{a}{6} + \frac{a^2}{16}.$$

5) Von $n^2 - \frac{2wn}{d} - n$ das ergänzte Quadrat

$$= n^2 - \frac{2wn}{d} - n + \frac{w^2}{d^2} + \frac{w}{d} + \frac{1}{4}.$$

59. Die Ausziehung der Cubikwurzel gründet sich auf $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, und man erhält daher auf ähnliche Weise die $\sqrt[3]{}$ aus

$$
\begin{array}{l}
x^3 + 3bx^2 + 3b^2x + b^3 = x + b \\
\underline{\pm x^3 \qquad\qquad} \\
\quad 3bx^2 + 3b^2x + b^3 \\
\quad 3x^2 \\
\underline{\pm 3x^2b \pm 3b^2x \pm b^3} \\
\qquad 0
\end{array}
$$

60. Die Methode aus Zahlen die $\sqrt[3]{}$ auszuziehen, ist folgende:

1) Man theile die Zahl von der rechten Hand zu der linken in Classen von 3 Ziffern.

2) Man suche (aus 56. Zus. 2.) den Cubus der ersten Classe, oder den nächstkleinern, so ist die dazu gehörige Zahl die erste Ziffer der Cubikwurzel.

3) Man ziehe diesen Cubus von der Zahl der ersten Classe ab, rücke zur Differenz die 2te Classe hinzu, setze das 3 fache Quadrat der ersten Ziffer in einer Parenthese so unter, daß die Einheiten unter die erste Ziffer der 2ten Classe kommen, dividire durch dasselbe die ober ihm stehende Zahlen, und nehme den Quotienten zur 2ten Ziffer der $\sqrt[3]{}$. Alsdann multiplicire man ihn durch den Divisor, setze das Produkt so unter, daß seine Einheiten unter die erste Ziffer der 2ten Classe kommen. Unter dieses setze man das Produkt aus dem 3fachen Quadrate der zweiten in die erste Ziffer und den Cubus der zwiten Ziffer, so daß die Einheiten von jenem unter die 2te, und von diesem unter die 3te Ziffer der 2ten Classe kommen, und addire die 3 Produkte. Ist ihre Summe größer, als die über ihr stehende Zahl, so ist die zweite Ziffer zu groß angenommen.

$$\sqrt[3]{21|024|576} = 276$$
$$\pm 8 \quad = a^3$$
$$13024$$
$$(12) = 3a^2$$
$$84 = 3a^2b$$
$$294 = 3ab^2$$
$$343 = b^3$$
$$\pm 11683$$
$$1341576$$
$$(2187) = 3a^2$$
$$13122 = 3a^2b$$
$$2916 = 3ab^2$$
$$216 = b^3$$
$$\pm 1341576$$
$$0$$

4) Alsdann ziehe man gedachte Summe von den über ihr stehenden Zahlen ab, rücke zur Differenz die Ziffern der 3ten Classe, nehme das 3fache Quadrat der beiden ersten Wurzelziffer und verfahre man wie oben (3.)

Zusatz. Bleibt nach der Behandlung aller Classen kein Rest, so hat man die Wurzel genau gefunden. Bleibt aber noch ein Rest, so ist die gegebene Zahl kein vollkommener Cubus. Um die Wurzel in diesem Fall so genau, als nothwendig ist, zu finden, verfährt man wie oben (57. 5.) bei der Ausziehung der Qudratwurzel, nur mit dem Unterschiede, daß hier so oft 3 Nullen angehängt werden müssen, als man Decimalen verlangt.

61. Da (54.) jede Wurzelgröße = einer potenzirten ist, welche einen gebrochenen Exponenten hat, dessen Zähler = dem Exponenten der Größe, und dessen Nenner = dem Exponenten der Wurzel ist, oder überhaupt

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ ist, so können mit den Wurzelgrößen auch alle Operationen, und auf dieselbe Weise, wie mit den potenzirten Größen, vorgenommen werden; d. i.

es wird a) in der Addition

$$\sqrt{a} + \sqrt{a} = 2\sqrt{a}$$
$$3\sqrt{a} + 4\sqrt{a} = 7\sqrt{a}, \text{ aber}$$
$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$
$$\sqrt{a} + \sqrt[3]{a} = \sqrt{a} + \sqrt[3]{a},$$

b) in der Subtraction

$$4\sqrt{a} - 3\sqrt{a} = \sqrt{a}, \text{ aber}$$
$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$\sqrt{a} - \sqrt[3]{a} = \sqrt{a} - \sqrt[3]{a}$, oder allgemein gleichartige Wurzeln lassen sich addiren und subtra-

hiren, bei ungleichartigen aber lassen sich diese Operationen nur anzeigen.

62. Eben so wird aus demselben Grunde

c) in der Multiplication

1) $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

2) $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$

3) $2\sqrt{b} \times c\sqrt{a} = 2c\sqrt{ab}$

4) $\sqrt{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt{a}\sqrt[3]{b}$

5) $\sqrt{a} \times \sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^5}$,

d) in der Division

1) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

2) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 1$

3) $\frac{2\sqrt{b}}{c\sqrt{a}} = \frac{2}{c}\sqrt{\frac{b}{a}}$

4) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}}$

5) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[6]{a}$, oder allgemein, gleichnamige Wurzeln verschiedener Größen können (1. 2. 3.) unter Ein Zeichen gebracht, ungleichnamige derselben Größe (5) wirklich multiplicirt und dividirt, bei ungleichnamigen Wurzeln verschiedener Größen aber (4) diese Operationen nur angezeigt werden.

63. Oft ist's vortheilhaft, Wurzelgrößen zu gleicher Benennung, d. i. zu denselben Wurzelexponenten zu bringen. Dadurch wird

$\sqrt{a}$ und $\sqrt[3]{b} = \sqrt[6]{a^3}$ und $\sqrt[6]{b^2}$; denn

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{a^3}$

$\sqrt[3]{b} = b^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{a^2}$.

Zusatz. Eben so ist

$\sqrt{a^3}$ und $\sqrt[3]{b^2} = \sqrt[6]{a^9}$ und $\sqrt[6]{b^4}$, und allgemein

$$3\sqrt[n]{\frac{b}{c}} \text{ und } 2\sqrt[m]{\frac{a}{d^2}} = 3\sqrt[nm]{\frac{b^m}{c^m}} \text{ und } 2\sqrt[nm]{\frac{a^n}{d^m}}.$$

64. Endlich lassen sich manche Wurzelausdrücke einfacher ausdrücken, z. B.

$\sqrt[3]{a^3b} = a^{\frac{3}{3}}b^{\frac{1}{3}} = a\sqrt[3]{b}$

$\sqrt{a^6b^4c^3} = a^{\frac{6}{2}}b^{\frac{4}{2}}c^{\frac{3}{2}} = a^3b^2c^{\frac{3}{2}} = a^3b^2\sqrt{c^3}$

$\sqrt[3]{a^3b - a^6c^2} = \sqrt[3]{a^3(b - a^3c^2)} = a\sqrt{b - a^3c^2}$

$\sqrt{\frac{a}{b^2}} = \frac{\sqrt{a}}{b}$

$\sqrt{4a} = 2\sqrt{a}$

$\sqrt{\frac{a^4}{b}} = a^2\sqrt{\frac{1}{b}}$

$\sqrt{\frac{a}{4}} = \frac{\sqrt{a}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{a}$

$\sqrt{32a} = \sqrt{16.2a} = 4\sqrt{2a}$

$\sqrt[3]{108} = \sqrt[3]{27.4} = 3\sqrt[3]{4}$

$\sqrt{\frac{b^3d}{a^2g}} = \sqrt{\frac{b^2.bd}{a^2g}} = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{bd}{g}} = \frac{b\sqrt{bd}}{a\sqrt{g}}$

$\frac{a\sqrt{48bc^2}}{2\sqrt[3]{16dg^3}} = \frac{a\sqrt{16.3bc^2}}{2\sqrt[3]{8.2dg^3}} = \frac{4ac\sqrt{3b}}{4g\sqrt{2d}} = \frac{ac\sqrt{3b}}{g\sqrt{2d}}$.

Logarithmenlehre.

65. Jede Größe a z. B. 2 wird
zum Quadrat erhoben $= a^2 = 2^2 = 4$
Cubus — $= a^3 = 2^3 = 8$
Biquadrat — $= a^4 = 2^4 = 16$ u. s. w.

Jede Größe wird also, je nachdem sie zu verschiedenen Potenzen erhoben wird, verschiedenen andern Größen gleich.

Da zwischen den angeführten Potenzen noch unzählig viele andere Potenzen liegen, zu welchen $a = 2$ erhoben, und dadurch allen zwischen 2 und 16 möglichen Zahlen gleich werden kann, so sieht man, daß durch fortschreitende Potenzirung $a = 2$ allen möglichen Größen und Zahlen gleich werden kann. Wenn daher allgemein die Exponenten n, m, r, v ꝛc. heissen, so wird a durch jeden einer andern Größe b, c, d, e ꝛc. gleich, und also

$$a^m = b$$
$$a^n = c$$
$$a^r = d$$
$$a^v = e.$$

Dasselbe gilt auch von 1 abwärts; denn $a = 2$ kann einen kleinern Werth erhalten als 1, wenn seine Exponenten negativ sind, und dadurch allen zwischen 1 und 0 liegenden (gebrochenen) Größen gleich werden; denn

a^0 oder

a^0 oder $2^0 = 1$

$a^{-1} = \frac{1}{a}$ oder $2^{-1} = \frac{1}{2}$

$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ oder $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

$a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ oder $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

$a^{-4} = \frac{1}{a^4}$ oder $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$ u. s. w.

allgemein also

$a^0 = 1$

$a^{-m} = \frac{1}{a^m} = \frac{1}{b}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{c}$

$a^{-r} = \frac{1}{a^r} = \frac{1}{d}$

$a^{-v} = \frac{1}{a^v} = \frac{1}{e}$ u. s. w.

Diese Exponenten m, n, r, v, — m, — n, — r, — v, durch welche a einer andern Größe gleich wird, heißen die **Logarithmen der Zahlen**, welche durch die Erhebung des a erzeugt worden sind. Also ist, wenn

$a^m = b$, m der Logarithmus von b,

$a^n = c$, n — — — c,

$a^r = d$, r — — — d,

$a^v = e$, v — — — e, oder wenn

$2^2 = 4$, 2 — — — 4,

$2^3 = 8$, 3 — — — 8,

$2^4 = 16$, 4 — — — 16 u. s. w.

Zusatz 1. Logarithmus ist also der Exponent einer Zahl, zu welchem sie erhoben werden muß, um einer andern gleich zu werden.

Zusatz 2. Man bezeichnet den Logarithmus mit Log. oder L., oder λ, wobei also wohl zu merken ist, daß Log., L. oder λ, nicht als Factoren der Größen, in welchen sie stehen, betrachtet werden dürfen, indem sie nur anzeigen, daß nicht die Größe selbst, sondern ihr Logarithmus genommen werden soll.

66. Wenn man sich nach einer Grundzahl a alle Logarithmen für alle Zahlen berechnet, so erhält man ein logarithmisches System von a. Man sieht aber wohl selbst ein, daß für a jede beliebige Zahl als Grundzahl angenommen werden kann, daß aber, je nachdem a verschieden ist, auch die Logarithmen der folgenden Zahlen des Systemes verschieden seyn müssen.

Der Logarithmus der Grundzahl aber bleibt immer, sie mag seyn, welche sie wolle, $=$ Log. $a^1 = 1$, so, wie der Logarithmus von $1 =$ Log. a^0 immer $= 0$ bleibt.

Zusatz. Der erste, welcher ein logarithmisches System geliefert hat, war Joh. Neper, Baron von Merchiston, ein Schottländer. Er setzte die Grundzahl $a = \frac{9999999}{10000000}$. Brigg, Professor der Geometrie in Oxford, fand aber diese Berechnung unbequem, und setzte die Grundzahl $a = 10$, worauf er ein neues unter dem Namen des brigg'schen bekanntes System berechnete, und für die Zahlen von 1 bis 20000, und von 90000 bis 100000. Die Lücke von 20000 bis 90000 füllte nachher ein holländischer Mathematiker, Adrian Vlacq, aus. Vollständige logarithmische Tafeln lieferten später

vorzüglich Schulze und Vega. La Lande veranstaltete eine sehr bequeme und fehlerfreie Ausgabe in Stereotypen, und Prasse eine noch mehr zusammengedrängte, auf welche ich mich hier auch immer beziehe.

67. Da ein Logarithmus (65.) Nichts ist, als der Exponent einer Potenz, zu welcher die Grundzahl a erhoben werden muß, um eine andere Größe b zu geben, so folgt, daß

1) in der Addition der Logarithmen n und p

$$L.\,n + L.\,p = Log.\,n + Log.\,p, \text{ und}$$

2) in der Subtraction

$$L.\,n - L.\,p = L.\,n - L.\,p, \text{ oder}$$

daß die Logarithmen wie gemeine Größen addirt und subtrahirt werden müssen.

68. Hingegen ändert sich

3) alle Multiplication in Addition um; denn wenn $n = a^x$, so ist aus dem Begriff eines Logarithmus (65.)

$$x = Log.\,n, \text{ also}$$

$$n = a^{log.\,n}.$$

Eben so, wenn $p = a^y$, so ist

$$y = Log.\,p, \text{ also}$$

$$p = a^{log\,p}, \text{ folglich}$$

$$n\,.\,p = a^{log.\,n} \times a^{log.\,p}.$$

Exponenten werden in der Multiplication nur addirt (45.), folglich

$$n\,.\,p = a^{log.\,n + log.\,p}, \text{ also (p. def.)}$$

$$Log.\,n\,.\,p = Log.\,n + Log.\,p.$$

4) Umgekehrt ändert sich alle Division in Subtraction um; denn es sey

$\frac{n}{p} = q$, so wird

$\frac{np}{p} = qp$, oder

$n = q \cdot p$, also

$\text{Log. } n = \text{Log. } q \cdot p.$ Es ist aber (3.)

$\text{Log. } q \cdot p = \text{Log. } q + \text{Log. } p$, folglich

$\text{Log. } n = \text{Log. } q + \text{Log } p$, also

$\text{Log. } q = \text{Log. } n - \text{Log. } p$,

$\text{Log. } \frac{n}{p} = \text{Log. } n - \text{Log. } p.$

Zusatz. Da ein Bruch ein durch die Division des Zählers durch den Nenner entstandener Quotient ist, so folgt, daß auch der Logarithmus eines Bruches durch Subtraction des Log. des Nenners von dem Log. des Zählers gefunden werde.

69. Eben so ändert sich

5) die Erhebung zu Potenzen in eine Multiplication der Wurzelgröße durch den Exponenten der Potenz; denn (68. Zus. 3.)

$\text{Log. } p^2 = \text{Log. } p \cdot p = \text{Log. } p + \text{Log. } p = 2 \text{ Log. } p$

$\text{Log. } p^3 = \text{Log } p \cdot p \cdot p = \text{Log. } p + \text{Log. } p + \text{Log. } p = 3 \text{ Log. } p$

$\text{Log. } p^4 = \text{Log. } p \cdot p \cdot p \cdot p = \text{L. } p + \text{L. } p + \text{L. } p + \text{L. } p = 4 \text{ L. } p$; also allgemein

$\text{Log. } p^n = n \text{ Log. } p.$

6) Umgekehrt ändert sich die Ausziehung einer Wurzel in eine Division der Größe durch den Exponenten der Wurzel; denn setzen wir

$$\sqrt[n]{p} = q, \text{ so ist}$$
$$p = q^n, \text{ also}$$
$$\text{Log. } p = \text{Log } q^n, \text{ und (5.)}$$
$$= n \text{ Log. } q, \text{ folglich}$$
$$\frac{\text{Log. } p}{n} = \text{Log. } q = \text{Log. } \sqrt[n]{p}.$$

70. Da Brigg die Grundzahl $a = 10$ gesetzt hat (66. Zus.), so ist jeder Logarithmus $= 10^x = x$, der Logarithmus von $1 = \text{Log. } 10^0$, also immer $= 0$;

$\text{Log. } 10^1 = 1$,
$\text{Log. } 10^2 = \text{Log. } 100 = 2$,
$\text{Log. } 10^3 = \text{Log. } 1000 = 3$,
$\text{Log. } 10^4 = \text{Log. } 10000 = 4$ u. s. w.

Hieraus wird klar, daß

a) die Logarithmen solcher Zahlen, welche zwischen 1 und 10 liegen, positive Brüche seyn müssen; denn da $\text{Log. } 1 = 0$, $\text{Log } 10 = 1$ ist, so müssen die Logarithmen zwischen 0 und 1 größer als 0, und kleiner als 1, d. i. Brüche seyn.

b) Die Logarithmen solcher Zahlen, welche zwischen 1, 10, 100, 1000 liegen, müssen gemischte Zahlen seyn; denn da $\text{Log } 10 = 1$, $\text{Log. } 100 = 2$, so müssen alle zwischen 1 und 2 liegende Logarithmen größer als 1 und kleiner als 2 seyn, d. i. sie müssen aus 1 und einem Bruche bestehen, u. s. w.

c) Ganz entgegengesetzt verhält sich die Sache abwärts von 1. Jeder Logarithmus von Zahlen zwischen 1 und $\frac{1}{10} = 0,1$ ist ein negativer ächter Bruch; denn da $\text{Log. } \frac{n}{p} = \text{Log. } n - \text{Log. } p$ (61. Zus. 4.), so

wird, wenn $p > n$ die Differenz negativ. Nun ist aber in jedem ächten Bruche $p > n$, folglich der Logarithmus ein negativer. — Dieser negative Logarithmus muß daher auch immer negativ wachsen, so daß

$$\text{Log. } 0,1 = -1$$
$$\text{Log } 0,01 = -2$$
$$\text{Log. } 0,001 = -3 \text{ u. s. w.}$$

alle dazwischen liegende eine negative gemischte Zahl geben.

71. Die Brigg'schen Logarithmen sind übrigens in Decimalbrüchen berechnet, welche gewöhnlich 7 (bei la Lande und Prasse 5) Decimalstellen haben. Die ganze Zahl, welche von dem Decimalbruche durch einen Punkt oder Beistrich abgesondert wird, heißt die Kennziffer (characteristica), die Decimalstellen aber zusammen die Mantisse.

Zusatz 1. Da Log. $10^0 = 0$, Log. $10^1 = 1$, Log. $10^2 = 2$, Log. $10^3 = 3$ u. s. w.,

so haben die Log. von 0 bis 10 die Kennziffer = 0
von 10 — 100 — — = 1
von 100 — 1000 — — = 2
von 1000 — 10000 — = 3
u. s. w.

umgekehrt also auch die Kennziffer
von 0 — 0,1 — = — 0
von 0,1 — 0,01 — = — 1
von 0,01 — 0,001 — = — 2
von 0,001 — 0,0001 — = — 3.

Zusatz 2. Ist daher der Logarithmus einer Zahl bekannt, so läßt sich leicht der Logarithmus einiger anderer Zahlen finden. Es sey z. B.

Log. 19 = 1,27875, so wird
Log. 190 = 2,27875
Log. 1900 = 3,27875.

Wäre hingegen

Log. 4,318 = 0,63528, so ist
Log. 43,18 = 1,63528
Log. 431,8 = 2,63528
Log. 4318 = 3,63528.

Zusatz 3. Den Gebrauch der Logarithmentafeln kann man durch mündliche Anleitung für gewöhnliche Fälle leicht kennen lernen. Oft aber findet man nicht alsobald genau, was man sucht, besonders in den gewöhnlichen Tabellen, welche nur bis 10000 gehen, und es ist nothwendig, aus den Tabellen erst das Gesuchte zu berechnen.

72. Um daher immer auch mittelst dieser Tafeln a) den entsprechenden Logarithmus für eine Zahl, oder b) die entsprechende Zahl für einen gegebenen Logarithmus zu finden, sind folgende Regeln zu bemerken:

73. *α*) Da die gewöhnlichen Tafeln nur auf 10000 reichen, so wird der Logarithmus einer Zahl, welche größer als 10000 ist, in denselben nicht mehr gefunden. Es sey z. B. diese Zahl 31415926. Um nun ihren Logarithmus zu finden, betrachte man die ersten 4 Ziffer als Ganze, die übrigen als Decimalen, und suche den Logarithmus der ganzen Zahl 3141, und ziehe ihn vom nächst größern ab. Dadurch wird

$$\begin{array}{rl} \text{Log. } 3142 = & 3,49720 \\ -\text{ Log. } 3141 = & \underline{3,49706} \\ & 0,00014. \end{array}$$

Durch eine Proportion. „Der Unterschied der beiden „Zahlen (= 1) verhält sich zu den als Decimalen be„trachteten Zahlen 0,5926 (als dem Unterschiede zwischen „5926 und 3141), wie der Unterschied der Logarithmen „(0,00014) zu x“, oder

$$1 : 0{,}5926 = 0{,}00014 : x \text{ wird}$$
$$x = 0{,}000082964.$$

Diese Zahl x addire man zu dem Logarithmus der Ganzen, wodurch

$$\begin{array}{r} 3{,}49706 \\ + \underline{0{,}0000829} \\ 3{,}4971429 \end{array} = \text{Log. } 3141{,}5926.$$

Macht man endlich die Kennziffer um Eins kleiner, als die Anzahl der Ziffer in der gegebenen Zahl (in unserm Fall 8 — 1 = 7), so ist

$$7{,}4971429 = \text{Log. } 31415926.$$

β) Ist die gegebene Zahl eine gemischte, so verändert man den Bruch, wenn er kein Decimalbruch ist, in denselben. Hat die Zahl dann nicht mehr als 4 Ziffer, wie z. B. 17,70, so suche man für sie als ganze Zahl den Logarithmus 3,49797, und mache die Kennziffer um 1 kleiner, als die gemischte Zahl Ziffern als Ganze hat (in unserm Fall 2 — 1), so ist 1,24797 der gesuchte Logarithmus.

Hat aber die gegebene gemischte Zahl mehr als 4 Ziffer, so betrachte man sie wieder als eine ganze, behandle sie, wie oben α) gesagt worden ist, und mache die Kennziffer wieder um 1 kleiner, als die Zahl Ziffer als Ganze enthält. Wäre die gegebene Zahl 3,1415926, so ist ihr Logarithmus = 0,4971429. . . .

γ) Soll der Logarithmus eines gemeinen Bruches gesucht werden, so hat man nur den Logarithmus des Zählers zu subtrahiren von dem Logarithmus des Nenners, und die Differenz negativ zu nehmen. So ist z. B. Log. $\frac{5}{9}$ = — (Log. 9 — Log. 5) = — (0,95424 — 0,69897) = — 0,25527.

δ) Wird aber der Logarithmus eines Decimalbruches gesucht, so hat man nur den Logarithmus der Zahl von der Anzahl der Decimalstellen zu subtrahiren, und die Differenz negativ zu nehmen. Es ist daher
Log 0,27 = — (2,00000 — Log. 27)
= — (2,00000 — 1,43136) = — 0,56864.

74. Eben so trift sich oft der Fall, daß ein Logarithmus gegeben ist, für welchen man die entsprechende Zahl in den gewöhnlichen Tafeln nicht findet.

α) Ist die Kennziffer größer als 3, die Mantisse aber unter der Kennziffer 3 in den Tafeln genau enthalten, so hänge man der ihr entsprechenden Zahl so viele Nullen an, als die Kennziffer Einheiten über 3 hat. Wäre z. B. der gegebene Logarithmus 6,00000, so ist die entsprechende Zahl 1000000.

β) Ist die Kennziffer kleiner als 3, die Mantisse aber nicht genau in den Tafeln, so suche man den Logarithmus unter 3. Findet man hier die Mantisse genau, so ist die dabeistehende Zahl die gesuchte, wenn sie als ein Decimalbruch betrachtet wird, in welchem die Anzahl der Ganzen um 1 größer ist, als die Kennziffer des gegebenen Logarithmus. Daher ist für 1,97049 die entsprechende Zahl 93,43.

Findet man aber die Mantisse auch unter 3 nicht genau, so nehme man denjenigen Logarithmus,

dessen Mantisse zunächst kleiner ist, als die gegebene. Die ihm entsprechende Zahl betrachte man als einen Decimalbruch, in welchem die Anzahl der Ganzen um 1 größer ist, als die Kennziffer des gegebenen Logarithmus. Es ist also 1,24802 = Log. 17,70.

γ) Ist die Kennziffer 3, oder größer als 3, die Mantisse aber nicht genau in den Tafeln, so nehme man die Kennziffer als 3 an, suche die Zahl, welche dem nächstkleineren Logarithmus entspricht, ziehe diesen vom gegebenen, und dem nächstgrößern ab, und suche zu der aus der Subtraction vom nächstgrößern entstandenen Differenz, zu der aus der Subtraction des nächstkleinern vom gegebenen, und zu 100 die 4te geometrische Proportionalzahl, setze diese zu der dem nächstkleinern Logarithmus zugehörigen Zahl, und betrachte diese als einen Decimalbruch, in welchem die Anzahl der Ganzen um 1 größer ist, als die Kennziffer des gegebenen Logarithmus. Wäre der gegebene Logarithmus 5,73787, so ist der nächstkleinere unter 3,
Log. 5468 = 3,73783, also

$$\begin{array}{r} 3{,}73787 \\ -\ 3{,}73783 \\ \hline 0{,}00004 \end{array}.$$

Der nächstgrößere ist Log. 5469 = 3,73791, also

$$\begin{array}{r} 3{,}73791 \\ -\ 3{,}73783 \\ \hline 0{,}00008 \end{array}, \text{ daraus also}$$

$$0{,}00008 : 0{,}00004 = 100 : x, \text{ oder}$$

$$8 : 4 = 100 : x, \text{ also}$$

$$x = \frac{400}{8} = 50, \text{ folglich}$$

Log. 5,73787 = Log. 546850.

δ) Ist der Logarithmus ein negativer, so findet man den entsprechenden Decimalbruch dadurch, daß man den Logarithmus als positiv betrachtet, und ihn von seiner Kennziffer n + 4 subtrahirt. Dann sucht man für den übrig gebliebenen Logarithmus die ihm entsprechende Zahl, und der Decimalbruch von n + 4 Decimalstellen, in welchen diese Zahl die niedrigste Stelle einnimmt, ist der verlangte. Wäre z. B. gegeben — 0,02898, so ist

$$\begin{array}{r} 4{,}00000 \\ -\ 0{,}02898 \\ \hline 3{,}97102. \end{array}$$

Die diesem Logarithmus entsprechende Zahl fällt in den Tafeln zwischen 9354 und 9355, also ist der entsprechende Decimalbruch = 0,9355.

75. Als Beispiel von der Anwendung der Logarithmen gebe ich hier zur Ergänzung der Progressionslehre

a) die Auffindung der Glieder-Anzahl n einer geometrischen Progression. Es ist aber (40. Zus. 1.)

$w = a \,.\, q^{n-1}$, also

$\frac{w}{a} = q^{n-1}$, und

$$\text{Log.}\ \frac{w}{a} = \text{Log.}\ q^{n-1}$$

$$\text{Log.}\ \frac{w}{a} = (n-1)\ \text{Log.}\ q$$

$$\text{Log.}\ \frac{w}{a} : \text{Log.}\ q = n - 1, \text{ folglich}$$

$$n = \text{Log.}\ \frac{w}{a} : (\text{Log.}\ q) + 1 = \frac{\text{Log.}\ w - \text{Log.}\ a}{\text{Log.}\ q} + 1.$$

Eben so war (36.)

$$S = \frac{aq^n - a}{q - 1}$$

$$\frac{S(q - 1) + a}{a} = q^n$$

$$\text{Log.} \frac{S(q - 1)}{a} + 1 = \text{Log.}\, q^n = n\, \text{Log.}\, q$$

$$n = \frac{\text{Log.} \left(\frac{S(q - 1)}{a} + 1 \right)}{\text{Log.}\, q}.$$

76. b) Eine zweite Anwendung machen wir auf die Zinsesrechnung. Da aber die Zinsesrechnung, nach welcher in jedem Jahre gewisse Interessen (4, 5, 6 vom Hundert) bezahlt werden, ohne weitere Modification des Vertrages, keiner Schwierigkeit unterworfen, sondern eine einfache Proportion (Regula de Tri) ist, so übergehen wir sie, und betrachten

α) den Fall, es habe Jemand ein Capital mit der Bedingung aufgenommen, daß er alle Jahre eine gleiche Summe, welche aus dem entsprechenden Interesse, und einem Theile des Capitales besteht, zurückbezahlen muß.

In diesem Fall wird das Capital, also auch das davon zu entrichtende Interesse mit jedem Jahre kleiner. Daher muß mit jedem Jahre von dem Capitale mehr bezahlt werden, um die immer gleiche bestimmte Summe zu geben.

Wenn wir das Capital $= c$ setzen, so ist das jährliche Interesse zu 4 p. C. $= \frac{c}{25}$, zu 5 p. C. $= \frac{c}{20}$ u. s. w. Also allgemein, wenn $\frac{1}{25}, \frac{1}{20} = \frac{n}{m}$ gesetzt wird, das zu entrichtende jährliche Interesse $= \frac{cn}{m}$.

Der Theil des Capitals, welcher im 1ten Jahre bezahlt werden muß, heisse x,
der im 2ten Jahre y,
der im 3ten — z,
der im 4ten — v u. s. w., so wird das Interesse

im 1ten Jahre $= \frac{n}{m} . c$,

im 2ten — $= \frac{n}{m}(c - x) = \frac{nc - nx}{m}$,

im 3ten — $= \frac{n}{m}(c - x - y) = \frac{nc - nx - ny}{m}$,

im 4ten — $= \frac{n}{m}(c - x - y - z) = \frac{nc - nx - ny - nz}{m}$.

Werden, um für jedes Jahr eine gleiche Summe zu haben, die für jedes Jahr treffenden Theile des Capitals x, y, z, v addirt, so wird

im 1ten Jahre $x + \frac{n}{m} c = \frac{mx + nc}{m}$,

im 2ten — $y + \frac{nc - nx}{m} = \frac{ym + nc - nx}{m}$,

im 3ten — $z + \frac{nc - nx - ny}{m} = \frac{mz + nc - nx - ny}{m}$,

im 4ten — $v + \frac{nc - nx - ny - nz}{m} = \frac{vm + nc - nx - ny - nz}{m}$

u. s. w.

Da die Summen, welche in jedem Jahre bezahlt werden, gleich sind, so ist im 2ten Jahre

$$\frac{mx + nc}{m} = \frac{my + nc - nx}{m}, \text{ also}$$

$$y = \left(\frac{m+n}{m}\right)x.$$ Eben so ist im 3ten Jahre

$$\frac{my + nc - nx}{m} = \frac{mz + nc - nx - ny}{m}, \text{ also}$$

$$z = \left(\frac{m+n}{m}\right)y = \left(\frac{m+n}{m}\right)\left(\frac{m+n}{m}\right)x = \left(\frac{m+n}{m}\right)^2 x.$$

Eben so im 4ten Jahre

$$\frac{mz + nc - nx - ny}{m} = \frac{mv + nc - nx - ny - nz}{m} = \left(\frac{m+n}{m}\right)^3 x$$

u. s. w.

Es bilden also diese Theile, welche alljährlich vom Capitale bezahlt werden müssen, die geometrische Progression

$$x\left(\frac{m+n}{m}\right)^0, x\left(\frac{m+n}{m}\right)^1, x\left(\frac{m+n}{m}\right)^2, x\left(\frac{m+n}{m}\right)^3 \ldots$$

in welcher die Anzahl der Glieder = der Anzahl der Jahre, nach welchen die ganze Zahlung vollendet seyn muß.

Setzen wir die Summe der Coefficienten

$$\left(\frac{m+n}{m}\right)^{0,\,1,\,2\,\ldots} = p, \text{ so ist}$$

$$x\left\{\frac{m+n}{m}\right\}^0 + x\left\{\frac{m+n}{m}\right\}^1 + x\left\{\frac{m+n}{n}\right\}^2 + x\left\{\frac{m+n}{m}\right\}^3 \ldots$$
$$= xp.$$

Da aber die Summe dieser Ausdrücke $=$ c ist, so wird $xp = c$, folglich

$$x = \frac{c}{p}.$$

Zusatz 1. Es ist daher der vom Capital zu bezahlende Betrag immer $=$ dem im ersten Jahre zu bezahlenden $x \times$ mit $\frac{m+n}{m}$ in der Potenz der Anzahl der vorausgegangenen Jahre.

Zusatz 2. Da allgemein $S = \frac{wq - a}{q - 1}$, so wird hier

$$c = xp = \frac{\left(\frac{m+n}{m}\right)^r x \cdot \left(\frac{m+n}{m}\right) - x}{\frac{m+n}{m} - 1} = \frac{\left(\frac{m+n}{m}\right)^{r+1} x - x}{\frac{n}{m}}$$

$$= \frac{\left(\left(\frac{m+n}{m}\right)^{r+1} - 1\right) x}{\frac{n}{m}}$$ folglich

Zusatz 3. $$\frac{cn}{mx} + 1 = \left(\frac{m+n}{m}\right)^{r+1}$$

$$\frac{cn + mx}{mx} = \left(\frac{m+n}{m}\right)^{r+1}$$

$\text{Log.} \frac{cn + mx}{mx} = (r+1) \text{ Log.} \frac{m+n}{m}$, folglich die Anzahl der Jahre

$$r + 1 = \text{Log.} \frac{cn + mx}{mx} : \text{Log.} \frac{m+n}{m}.$$

Zusatz 4. Eben so ist aus obiger Gleichung (Zus. 2.)

$$\frac{cn}{m} = \left(\left(\frac{m+n}{m}\right)^{r+1} - 1\right)x$$

$$\frac{c \cdot n}{m\left(\left(\frac{m+n}{m}\right)^{r+1} - 1\right)} = x =$$ dem im ersten Jahre von dem Capital zu bezahlenden Theile.

Zusatz 5. Heißt die ganze in jedem Jahre zu bezahlende Summe d, so ist dieselbe

$d = x + \frac{nc}{m}$, also auch der Capitalsantheil des ersten Jahres

$x = d - \frac{nc}{m}$, das Capital selbst

$c = (d - x)\frac{m}{n}$, der Zinsfuß

$$\frac{n}{m} = \frac{d-x}{c}.$$

Zusatz 6. Ist in dem Bruche $\frac{n}{m}$ $n = 1$, wie z. B. bei 5 p. Cent. $= \frac{1}{20}$, bei 4 p. Cent. $= \frac{1}{25}$ u. s. w., so werden die obigen Formeln

$$c = \left(\left(\frac{m+n}{m}\right)^{r+1} - 1\right)xm,$$

$$r + 1 = \text{Log.}\ \frac{c - mx}{mx} : \text{Log.}\ \frac{m+1}{m},$$

$$x = \frac{c}{m\left(\left(\frac{m+n}{m}\right)^{r+1} - 1\right)}.$$

Zusatz 7. Wäre das angelegte Capital zu 5 p. C. auf $4 = r+1$ Jahre 8620 fl. $= c$, so ist $\frac{n}{m} = \frac{1}{20}$, also

$$x = \frac{8620}{20\left(\left(\frac{21}{20}\right)^4 - 1\right)} = \frac{8620}{20\left(\frac{194481}{160000} - 1\right)}$$

$$= \frac{8620}{20\left(\frac{194481 - 160000}{160000}\right)} = \frac{8620}{\frac{194481 - 160000}{8000}}$$

$$= \frac{8620 \times 8000}{34481} = 1999{,}99 \ldots . = 2000 \text{ fl.}$$

$$r + 1 = \text{Log.} \frac{8620 + 20 \,.\, 2000}{20 \,.\, 2000} : \text{Log.} \tfrac{21}{20}$$

$$= \text{Log.} \frac{8620 + 40000}{40000} : \text{Log. } 1{,}05$$

$$= \text{Log.} \frac{48620}{40000} : \text{Log. } 1{,}05$$

$$= \frac{\text{Log. } 1{,}215}{\text{Log. } 1{,}05}$$

$$= \frac{0{,}08458}{0{,}02119} = 3{,}99 \ldots . = 4$$

$$c = \left(\left(\frac{21}{20}\right)^4 - 1\right) 20 \,.\, 2000 = \left(\frac{194481}{160000} - 1\right) 40000$$

$$= \left(\frac{194481 - 160000}{160000}\right) 40000 = \frac{34481}{160000} 40000$$

$$= \frac{34481}{4} = 8620.$$

$$d = 2000 + \frac{8620}{20} = 2000 + 431 = 2431 \text{ fl.}$$

Zusatz 8. Im 2ten Jahre ist das Capital nur mehr $8620 - 2000 = 6620$, die Interessen also $\frac{6620}{20} = 331$, um daher 2431 voll zu machen, müssen vom Capital genommen werden

$$2100 + 331 = 2431.$$

Im 3ten Jahre ist das Capital noch 4520, die Interessen 226, der Capitalsantheil also

$$2205 + 226 = 2431.$$

Im 4ten Jahre ist das Capital 2315, das Interesse also

$$115 \ldots \tfrac{2515}{8620} + 116 = 2431.$$

77. β) Wenn ein Capital so ausgeliehen wird, daß alle Jahre der Zins zu dem Capitale geschlagen, und selbst wieder verzinset wird, so heißt diese Art des Darlehens das Darlehen auf Zinseszins, oder Anatocismus. Wir haben hier eine allgemeine Formel zu suchen, welche bestimmt, wie groß nach einer gewissen Zeit das Capital geworden ist.

Es sey allgemein ein Capital a, so ist auch allgemein der Zins eines Jahres $= \frac{a \cdot n}{m}$, und nach einem Jahre die ganze Summe $= a + \frac{an}{m}$. Wenn daher unser bestimmtes Capital c heißt, so wird

$$a : a + \frac{an}{m} = c : x$$

$$a : \left(\frac{m+n}{m}\right) a = c : x$$

$$1 : \frac{m+n}{m} = c : x,$$ also nach dem

ersten Jahre die ganze Summe $x = \left(\frac{m+n}{m}\right) c.$

Eben so ist

$$c : \left(\frac{m+n}{m}\right) c = \left(\frac{m+n}{m}\right) c : y, \text{ also}$$

nach 2 Jahren $y = \left(\frac{m+n}{m}\right)^2 \frac{c^2}{c} = \left(\frac{m+n}{m}\right)^2 c,$

Und

$$\frac{m+n}{m} c : \left(\frac{m+n}{m}\right)^2 c = \left(\frac{m+n}{m}\right)^2 c : z, \text{ also}$$

nach 3 Jahren $z = \left(\frac{m+n}{m}\right)^4 c^2 : \left(\frac{m+n}{m}\right) c$

$$= \left(\frac{m+n}{m}\right)^{4-1} c = \left(\frac{m+n}{m}\right)^3 c.$$

Also allgemein nach r Jahren das ganze Capital

$$S = \left(\frac{m+n}{m}\right)^r c.$$

Zusatz 1. Daher auch

$$\frac{S}{c} = \left(\frac{m+n}{m}\right)^r$$

$\text{Log.} \frac{S}{c} = r \,.\, \text{Log} \frac{m+n}{m}$, also die Anzahl der Jahre, welche c aufliegen muß, um $= S$ zu werden, oder

$$r = \text{Log.} \frac{S}{c} : \text{Log.} \frac{m+n}{m} \text{ und } c = \frac{S}{\left(\frac{m+n}{m}\right)^r}.$$

Zusatz 2. Wäre daher das Capital c = 2000 fl., $\frac{n}{m} = \frac{1}{20}$, r = 4 Jahre, so wäre

$$S = \left(\tfrac{21}{20}\right)^4 . 2000 = \tfrac{194481}{160000} . 2000$$

$$= \frac{194481}{80} = 2431 \text{ fl.}$$

$$r = \text{Log. } \frac{2431}{2000} : \text{Log. } \tfrac{21}{20}$$

$$= \text{Log. } \frac{2431}{2000} : \text{Log. } 1{,}05.$$

$$c = \frac{2431}{\left(\tfrac{21}{20}\right)^4} = 2431 : \frac{194481}{160000}$$

$$= \frac{2431 . 160000}{194481} = 1999{,}99 \ldots . = 2000.$$

78. γ) Wenn Jemand, gemäß eines Vertrages, ein Capital nach einigen Jahren erst zurückbezahlen soll, dasselbe unter dieser Zeit unverzinslich gebrauchen kann, der Gläubiger aber nun sein Capital früher erhalten will, so nennt man dieses Verfahren die Anticipation (Rabbath). Da aber dieses Capital dem dermaligen Besitzer Zinseszins getragen hätte, so hat er das Recht, so viel von dem ganzen Capital abzuziehen, als die Zinse ihm eingetragen hätten, um so mehr, als der Gläubiger durch den frühern Empfang seines Capitals diese Zinseszinse zu gewinnen Gelegenheit hat.

Es heiße nun das ganze Capital c, die kleinere der Anticipation wegen zurückzustellende Summe x,

der Zinsfuß $\frac{n}{m}$,

die Jahre der Anticipation r.

Die Summe des ganzen Capitals c läßt sich als entstanden denken aus der durch Anticipation zu bezahlenden Summe x, wenn sie auf Zinseszins r Jahre gelegen hätte, so daß

$$c = x \left(\frac{m+n}{m}\right)^r, \text{ folglich}$$

$$x = \frac{c}{\left(\frac{m+n}{m}\right)^r} = c \left(\frac{m}{m+n}\right)^r.$$

Zusatz 1. Daher wird

$$\frac{c}{x} = \left(\frac{m+n}{m}\right)^r,$$

$$\text{Log. } \frac{c}{x} = \text{Log. } \left(\frac{m+n}{m}\right)^r$$

$$= r \text{ Log. } \left(\frac{m+n}{m}\right),$$ also die Anzahl der Jahre

$$r = \text{Log. } \frac{c}{x} : \text{Log. } \frac{m+n}{m}.$$

Zusatz 2. Sollte die zu 5 p. Cent. liegende Summe von 23000 fl. nach 3 Jahren erst zurückbezahlt werden, und verlangte sie der Gläubiger schon jetzt, so würde

$$c = 23000, \; r = 3, \; \frac{n}{m} = \frac{1}{20}, \text{ und daher}$$

$$x = 23000 \cdot \left(\tfrac{20}{21}\right)^3 = 23000 \cdot \frac{8000}{9261} = 19868 \text{ fl. } 12 \text{ kr.}$$

$$r = \text{Log. } \frac{23000}{19868{,}2} : \text{Log. } \tfrac{21}{20}$$

$$= \frac{\text{Log. } 1{,}157}{\text{Log. } 1{,}05} = \frac{0{,}06333}{0{,}02119} = 2{,}98 = \,.\,.\, = 3$$

$$c = 19868{,}2\ (\tfrac{21}{20})^3 = 19868{,}2 \cdot \frac{9261}{8000}$$

$$= \frac{183999400{,}2}{8000} = 22999{,}925$$

$$= 23000 \text{ fl.}$$

Anfangsgründe der Geometrie.

1. Die Geometrie ist die Wissenschaft von der Natur und den Verhältnissen der Ausdehnung des Raumes.

Zusatz. Da der Raum entweder a) der Länge nach allein, oder b) der Länge und Breite nach, oder c) der Länge, Breite und Höhe (Tiefe) nach zugleich ausgedehnt seyn kann, so wird der Gegenstand der Geometrie in die Lehre α) von den Linien, β) von den Flächen, γ) von den Körpern zerfallen, welche Theile den Namen der Longimetrie, Planimetrie und Stereometrie führen.

2. Es ist aber ein Körper in geometrischem Sinne eine Raumgröße, die zu ihren Grenzen Flächen, eine Fläche eine Raumgröße, welche zu ihren Grenzen Linien, und eine Linie eine Raumgröße, welche zu ihren Grenzen Punkte hat.

Zusatz 1. Da die Grenze nicht ein Theil, sondern das Aufhören einer Größe ist, so kann der Körper nicht aus Flächen, die Fläche nicht aus Linien, die Linie nicht aus Punkten bestehen.

Zusatz 2. Es ist daher jeder, auch kleinste Theil einer Raumgröße seinem Ganzen gleichartig.

Zusatz 3. Der geometrische Punkt aber ist unausgedehnt, und daher mit keiner geometrischen Grösse gleichartig.

Von den Linien und ihrer Vereinigung zu Winkeln (Longimetrie.)

---

3. Eine Linie AB (Fig. 1.) heißt eine gerade (recta), wenn alle ihre Theile einerlei Richtung haben, heißt aber eine krumme (curva), wenn kein Theil derselben gerade ist.

Zusatz. Alle gerade Linien sind daher einander ähnlich, und alle gleiche Linien sind congruent.

4. Linien, welche in allen Theilen gleichweit von einander abstehen, heissen parallele, wie AB und CD (Fig. 1.). Linien hingegen, welche sich von einander entfernen, heissen divergirende, die sich einander nähern, convergirende. Linien, welche mit der Oberfläche eines ruhigen Wassers parallel sind, heissen horizontale (wasserrechte), welche darauf in der Richtung eines geradefallenden Körpers stehen, heissen perpendiculäre (senkrechte, bleirechte).

5. Jede krumme Linie, die von einem Punkte (Fig. 2.) A aus, und durch Z, B, N wieder zu A zurückkehrt, heißt eine Peripherie, ein Theil von ihr AM, MZ, ZB u. s. w. ein Bogen (arcus), eine gerade Linie, die einen Bogen unterspannt, ZaB, AbN u. s. w. eine Sehne (chorda), ein Punkt C, von welchem die entgegengesetzte Theile der Peripherie gleichweit entfernet sind, heißt der Mittelpunkt (Centrum), eine gerade Linie AC, CO, CZ u. s. w., welche vom

Mittelpunkte zu einem Punkte der Peripherie gezogen wird, heißt ein Halbmesser (Radius), die Summe 2 einander entgegengesetzter Radien ZN, AB, MO ein Durchmesser (Diameter), eine Linie endlich, welche die Peripherie an ihrer erhabenen Seite an einem, und nur an Einem Punkte berührt, wie BT, eine Tangente (tangens).

Zusatz 1. Ist jeder Punkt der Peripherie vom Mittelpunkte gleichweit entfernet, so heißt die krumme Linie ein Kreis (circulus).

Zusatz 2. Daher sind im Kreise

a) alle Radien einander gleich.

b) Je größer der Durchmesser, desto größer die Peripherie, so, daß sich die Durchmesser verhalten, wie die Peripherien, und umgekehrt.

c) Je größer die Sehne, desto größer der Bogen, und umgekehrt.

d) Der Durchmesser ist die größte Sehne.

e) Auf jeder Linie, als Durchmesser angenommen, läßt sich ein Kreis beschreiben.

6. Die Abweichung (sonst auch Neigung) zweier geraden Linien MC und AC (Fig. 2.), welche einen Punkt C gemein haben, heißt ein Winkel (angulus). Die beiden Linien, die ihn bilden, heißen dann Schenkel (crura), der Punkt aber, in dem sie zusammenstossen, der Scheitel (vertex).

7. Sind die beiden Schenkel einander directe entgegengesetzt, so heißt der Winkel ACB ein gerader. Die beiden Winkel ACM und MCB, welche zusammen den geraden Winkel geben, heissen Nebenwinkel

(ang. contigui - deinceps positi). — Sind die beiden Nebenwinkel einander ungleich, so heissen sie schiefe Winkel (ang obliqui); sind sie aber gleich, so sind sie rechte Winkel (ang. recti), und ein Schenkel ist auf dem andern senkrecht.

Zusatz. Es ist daher

a) die Summe zweier Nebenwinkel = der Summe zweier anderer, und

b) = 2 rechten Winkeln, und

c) jeder rechte Winkel = $\frac{1}{2}$ geraden.

8. Wenn 2 parallele Linien AB und CD (Fig. 1.) von einer dritten fe durchschnitten werden, so entstehen an jeder der parallelen Linien 4 Winkel, an AB nämlich r, m, s, n, und an CD ρ, μ, σ, ν, und es heissen s und σ Wechselwinkel (ang. alterni), s und m, r und n, σ und μ, ρ und ν Verticalwinkel (ang. verticales), σ in Rücksicht auf m, heißt ein innerer, m ein äußerer, σ und n, s und ν innere entgegengesetzte, m und ρ, μ und r äußere entgegengesetzte.

9. Ein Centriwinkel (ang. ad centrum) ist ein Winkel, welcher seinen Scheitel im Mittelpunkte des Kreises hat, wie (Fig. 2.) ACM, MCZ u. s. w.; ein Peripheriewinkel (ang. ad Peripheriam) aber ein Winkel, welcher seinen Scheitel in einem Punkte der Peripherie hat, wie NZO, ANZ, OZB u. s. w.

10. Denkt man sich den Schenkel MC auf AC, so, daß er durch seine Abweichung nach und nach die Winkel mCA, MCA, μCA bildet, so beschreibt er die Bögen Am, AM, Aμ, welche um so größer werden, je grö-

ßer die Abweichung von AC wird. Diese Bögen dienen daher auch, die Größe der Abweichung, oder die Größe der Winkel zu messen.

Zusatz 1. Die Geometer theilen jeden Kreis in 360 Theile, welche man Grade nennt, jeden Grad theilt man wieder in 60 Theile (Minuten), und diese neuerdings in 60 Secunden. Man bezeichnet der Kürze wegen die Grade mit einer über die Zahl geschriebene o, die Minuten mit ′, die Secunden mit ″.

Zusatz 2. Daher ist

a) jeder gerade Winkel $= \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$, also

b) jeder rechte Winkel $= \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$,

c) jeder schiefe Winkel entweder größer oder kleiner als 90°, und

d) Winkel, welche eine gleiche Anzahl Grade, Minuten u. s. w. zu ihrem Maaße haben, sind immer gleich, ihre Schenkel mögen, wie immer, kurz oder lang seyn.

Zusatz 3. Ein schiefer Winkel, welcher > 90° ist, wie (Fig. 2.) ACD, heißt ein stumpfer (ang. obtusus), der aber, welcher < 90° ist, wie mCA, MCA u. s. w., ein spitzer (ang. acutus).

11. Aus einem Punkte c (Fig 3.) kann nicht mehr als eine senkrechte Linie co auf die Linie AB gezogen werden; denn

setzen wir, co sey wirklich senkrecht auf c, neben ihr sey aber auch cs senkrecht, so würde sowohl ocB, als

$scB = 90°$, also $ocB = scB$. Nun ist aber
$ocB = ocs + scB$, also
$ocB > scB$, folglich auch sc nicht senkrecht. Eben dieses gilt auch von cr, also ist außer oc dieß- und jenseits keine senkrechte Linie auf c möglich.

Zusatz 1. Werden daher auf beiden Seiten von c gleiche Theile cm und cd genommen, so wird jeder Punkt n der senkrechten Linie co von m und d gleichweit entfernet seyn; denn da diese senkrechte Linie auf keine Seite geneigt ist, so wird $nm = nd$.

Zusatz 2. Also geht die senkrechte Linie durch alle Punkte, welche von m und d gleichweit entfernet sind, und umgekehrt.

12. Zwei Verticalwinkel fmB und νsA (Fig. 1.) sind einander gleich; denn da jedes Paar Nebenwinkel = 2 Rechten = 180° (7. Zus. b), so ist

$\sigma nB + \nu sA = 180°$, und
$\sigma nB + fmB = 180°$, also
$\sigma nB + \nu sA = \sigma nB + fmB$, und
$\nu sA = fmB$.

Zusatz 1. Wenn daher von 4 Winkeln, welche durch die Durchschneidung zweier gerader Linien gebildet werden, einer gegeben ist, so sind die drei übrigen gleichfalls bekannt; denn es sey z. B. fmB gegeben, so ist (12.)

$\nu sA = fmB$. Hingegen (7. Zus.)
$Bn\sigma = 180° - \nu sA$, und
$frA = 180° - fmB$.

Zusatz 2. Zwei senkrecht sich durchschneidende Linien bilden also 4 rechte Winkel.

13. Werden zwei parallele Linien AB und CD von einer dritten fe schief durchschnitten, so sind

a) der innere Winkel $D\sigma n$ = dem äußern entgegengesetzten fmB,

b) die Wechselwinkel $As\nu$ und $D\sigma n$ einander gleich, und

c) die Summe der zwei innern entgegengesetzten $Bn\sigma + D\sigma n = 180°$; denn

α) da AB und CD (ex hyp.) parallel sind, so müssen auch die Winkel $D\sigma n$ und fmB, unter welchen sie von einer dritten geraden Linie durchschnitten werden, gleich seyn.

β) Da Verticalwinkel (12.) einander gleich sind, so ist $As\nu = fmB$, und (α)
$= D\sigma n$.

γ) Da $As\nu + Bn\sigma = 180°$ (7. Zus.)
$As\nu = D\sigma n$ (β), so ist auch
$D\sigma n + Bn\sigma = 180°$.

Zusatz. Wenn also umgekehrt zwischen zwei geraden Linien die von einer dritten durchschneidenden Linie gebildeten Wechselwinkel gleich, oder ein äußerer = dem innern entgegengesetzten, oder die Summe der zwei innern entgegengesetzten Winkel = 180° sind, so sind die Linien parallel.

14. Der Centriwinkel (9.) hat zu seinem Maaße den ganzen Bogen, auf welchem er steht; denn da (10.) jeder Winkel durch den Bogen, auf dem er steht, gemessen wird, also wenn der Bogen $Am\mu Z = \frac{1}{4}$ des Kreises ist, $ACZ = 90°$, so wird, wenn M in die Mitte zwischen A und Z fällt, der Winkel

$MCA = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$. Wäre m in der Mitte zwischen M und A, so würde $mCA = \frac{45^\circ}{2} = 22\frac{1}{2}^\circ$ u. s. w., also ist immer der ganze Bogen, auf welchem ein Centriwinkel steht, sein Maas.

15. Der Winkel, welcher von der Tangente am Berührungspunkte und einer Sehne gebildet wird (Tangentialwinkel), hat zu seinem Maase den halben Bogen, den die Sehne unterspannet. Es sind hier zwei Fälle möglich. Entweder

a) geht die Sehne (als Durchmesser) durch den Mittelpunkt des Kreises, wie (Fig. 4.) ZN, und bildet mit der Tangente MZ den Winkel MZN, oder

b) sie geht nicht durch den Mittelpunkt, wie (Fig. 5.) NZ, welche mit der Tangente ZM den Winkel NZM bildet.

Es sey nun im ersten Falle der Durchmesser AB zur Tangente MZ parallel gezogen, so ist ACN = MZN (13. a). Das Maas von ACN ist aber als Centriwinkel der Bogen AN (14.), also AN auch das Maas von MZN. Es ist aber

$$AN = \frac{1}{2} ZAN,$$

ZAN aber der Bogen zwischen der Tangente MZ und der Sehne ZN, also u. s. w.

Im zweiten Falle sey der Bogen NAZ durch den Durchmesser DA in zwei gleiche Theile getheilt, so, daß NA = AZ. Senkrecht auf denselben, und parallel mit der Sehne NZ stehe ein zweiter Durchmesser FB, und ein dritter Durchmesser PZ stehe senkrecht auf die Tangente ZM, so wird (nach dem ersten Falle)

NZM + NZP = PZM = 90° und (p. construct.)
ACZ + ZCB = 90°, also
NZM + NZP = ACZ + ZCB.

Da aber (ex constr.) NZ zu FB parallel ist, so wird (13.)

NZP = BCZ, also
NZM = ACZ.

Es ist aber für ACZ das Maas der Bogen AZ = $\frac{1}{2}$ NAZ, also auch für NZM.

Also hat allgemein jeder Winkel, der durch eine Sehne und eine Tangente gebildet wird, den halben Bogen, den die Sehne unterspannt, zu seinem Maase.

Zusatz 1. Deßwegen ist auch das Maas eines Winkels an der Peripherie DAB, welcher (Fig. 6) von einer Sehne AB und einer Linie DA, welche in ihrer Fortsetzung AE den Kreis durchschneiden würde, gebildet wird, der $\frac{1}{2}$ Bogen AB, den die Sehne unterspannt + $\frac{1}{2}$ Bogen AE, welchen die Fortsetzung der Linie DA unterspannen würde; denn
verlängert man die Linie DA bis E, und zieht man die Tangente ZAM, so besteht der gegebene Winkel DAB aus DAM + MAB Es ist aber

DAM = ZAE, folglich

DAB = MAB + ZAE Es ist aber das Maas von MAB der $\frac{1}{2}$ Bogen AyB,
von ZAE der $\frac{1}{2}$ Bogen AxE, folglich
von DAB der $\frac{1}{2}$ Bogen AyB + $\frac{1}{2}$ Bogen AxE.

16. Ein Peripheriewinkel hat den halben Bogen, auf dem er steht, zu seinem Maase; denn es sey (Fig. 4.) ZNB so ein Winkel, so ist, weil als Tangentialwinkel ZNS = ZNB + BNS, und sein Maas

= dem halben Bogen ZBN. Da aber das Maas von BNS = $\frac{1}{2}$ BN ist, so wird das Maas von ZNB = $\frac{1}{2}$ BZ.

Zusatz 1. Ein Centriwinkel, welcher auf demselben Bogen steht, ist also noch ein Mal so groß als der Peripheriewinkel.

17. Das Maas eines Winkels BAC inner der Peripherie (Fig. 7.), ist der $\frac{1}{2}$ Bogen, auf dem er steht, + dem $\frac{1}{2}$ Bogen, auf welchem die Verlängerung seiner Schenkel steht; denn verlängert man die Schenkel, und zieht man mit EC die parallele Linie FD, so ist das Maas von BFD der $\frac{1}{2}$ Bogen BD (16.) = BC + CD. Da aber (13.) BFD = BAC, so ist auch das Maas von BAC der $\frac{1}{2}$ Bogen BC + CD. Und da zwischen parallelen CD = EF, so ist das Maas von BAC der $\frac{1}{2}$ Bogen BC + $\frac{1}{2}$ Bogen EF.

18. Das Maas eines Winkels BAC (Fig 8.) außer der Peripherie, ist der halbe hohle Bogen BC — dem $\frac{1}{2}$ erhabenen Bogen EF, auf welchen er steht; denn zieht man mit AB die parallele Linie FD, so ist das Maas von DFC der $\frac{1}{2}$ Bogen DC = $\frac{1}{2}$ (BC — BD). Da aber (13.) DFC = BAC, so ist auch das Maas von BAC der $\frac{1}{2}$ Bogen (BC — BD)

= $\frac{1}{2}$ Bogen (BC — EF).

Von

Von den Flächen (Planimetrie).

a) Ihre Eigenschaften.

19. Wenn Linien so zu einander gestellt sind, daß sie durch ihr Zusammentreffen einen Raum allenthalben einschliessen, so bilden sie eine **Figur**. Eine geometrische Figur ist also Nichts, als ein allenthalben durch Linien begrenzter Raum. Die begrenzenden Linien heissen **Seiten** (latera), und alle zusammen der **Perimeter** einer Figur.

Zusatz. Da alle Figuren durch die Neigung einiger Linien zu einander entstehen, so kömmt allen Figuren der Name eines **Vieleckes** (Polygonum) zu, deren Unterscheidung von einander von der Anzahl der Winkel, durch welche sie gebildet werden, hergenommen wird, z. B. Dreiecke, Vierecke u. s. w.

20. Die Linie, auf welcher man sich die übrigen als ihrer Grundlage denkt, heißt die **Grundlinie** (Basis). In Fig. 9. z. B. AB.

Zusatz. Da aber auch auf jeder andern Linie der Figur dieselbe gebaut gedacht werden kann, so ist es sehr oft willkührlich, welche von den Linien als Grundlinie angenommen werden soll.

21. Figuren, welche nur aus geraden Linien bestehen, heissen **geradlinichte** (rectilineae), welche nur aus krummen bestehen, **krummlinichte** (curvilineae), die aus geraden und krummen zusammengesetzt sind, **gemischte** (mixtae).

22. Bei der Gleichheit der Figuren wird nur auf die Gleichheit des eingeschlossenen Raumes der Größe nach Rücksicht genommen, bei der Aehnlichkeit derselben aber auf die Lage der correspondirenden Linien, und die daraus entspringende Gleichheit der Winkel.

Zusatz. Daher können Figuren gleich seyn, ohne ähnlich, und ähnlich seyn, ohne gleich zu seyn. Congruente Figuren müssen daher ähnlich und gleich seyn, oder sich vollkommen einander decken.

α) Von den Dreiecken.

23. Ein Dreieck ist ein von 3 Linien vollkommen begrenzter Raum. Es heißt, je nachdem die Linien gerade oder krumme, oder gerade und krumme sind, ein geradelinichtes, krummlinichtes oder gemischtes. Gleichseitig (aequilaterum) heißt ein Dreieck, wenn alle Linien, gleichschenklicht (aequicrurum, isosceles) aber, wenn zwei Linien gleich sind. Spitzwinklicht heißt ein Dreieck, wenn es aus lauter spitzen Winkeln besteht, stumpfwinklicht aber, oder rechtwinklicht, wenn ein stumpfer oder rechter Winkel darin vorkömmt.

Zusatz 1. Das Dreieck ist daher das einfachste Polygon.

Zusatz 2. Der Unterschied aller Dreiecke hängt von den einschliessenden Seiten oder den eingeschlossenen Winkeln ab.

Zusatz 3. Im rechtwinklichten Dreiecke heißt die dem rechten Winkel gegenüber stehende Seite Hypothenuse.

Zusatz 4. Homologe Seiten zweier ähnlicher Dreiecke sind diejenigen, welche gleichen Winkeln entgegengesetzt sind.

24. Die Summe der drei Winkel eines Dreieckes ist = zwei Rechten = 180°; denn (Fig. 10.) wenn mit der Basis CB an dem Scheitel des Dreieckes A die parallele Linie ef gezogen wird, so ist (13.)
ACB = eAC und fAB = ABC. Da aber (10.)
eAC + CAB + BAf = 180°, so ist (substitu.)
ABC + CAB + ACB = 180° = 2 Rechten.

Zusatz 1. Kein Dreieck kann also mehr als Einen rechten oder stumpfen Winkel haben.

Zusatz 2. Man findet den dritten Winkel, wenn die Summe der zwei übrigen bekannt ist, dadurch, daß man diese Summe von 180° abzieht.

Zusatz 3. Der äußere Winkel ACF ist = ABC + CAB; denn
ACF + ACB = 180° (7.) und
ACB + CBA + CAB = 180° (24.), also
ACF + ACB = ACB + CBA + CAB, und
ACF = ABC + BAC.

Zusatz 4. In einem rechtwinklichten Dreiecke ist ein spitzer Winkel für den andern die Ergänzung zu einem rechten Winkel (complementum ad ang. rectum).

Zusatz 5. Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel entweder einzeln oder zusammen gleich sind, so sind auch die dritten gleich.

25. In jedem Dreiecke ist dem größern Winkel die größere, dem kleinern die kleinere Seite entgegengesetzt; denn

wenn (Fig. 11.) um das Dreieck BDC ein Kreis beschrieben wird, so werden die Winkel DBC, BDC, DCB lauter Peripheriewinkel, welche den halben Bogen, auf dem sie stehen, zu ihrem Maase haben (16.). Das Maas des Winkels DBC ist also $\frac{1}{2}$ DC

— — — DCB — — $\frac{1}{2}$ BD > $\frac{1}{2}$ DC

— — — BDC — — $\frac{1}{2}$ BaC > $\frac{1}{2}$ BD,

folglich u. s. w.

Zusatz 1. Daher ist die Hypothenuse in einem rechtwinklichten Dreiecke die größte Seite.

26. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn alle Winkel, und die ihnen entgegengesetzten Seiten gleich sind (22. Zus.). Dieß ist aber immer der Fall, wenn

a) alle Winkel und eine Seite, oder

b) zwei Seiten und ein Winkel, oder

c) alle Seiten einander gleich sind; denn

a) wenn (Fig. 12.) in den Dreiecken X und Z alle Winkel gleich sind, und überdieß die Seite AB = ab, so wird AB von ab vollkommen gedeckt. Da auch der Winkel ABC = abc, so muß auch BC auf cb, und weil CAB = cab, AC auf ac fallen, und C von B eben so weit entfernet seyn als c von b, weil, wenn CB < oder > cb wäre, der Winkel ACB auch > oder < als acb seyn mußte, welches gegen die Voraussetzung ist. Folglich ist in dem gegebenen Falle außer den als gleich gesetzten Winkeln und AB = ab auch AC = ac, BC = bc, folglich die Dreiecke X und Z congruent.

b) Hier ist entweder α) der eingeschlossene, oder β) ein anliegender Winkel als gleich gegeben.

α) Im ersten Falle sey (Fig. 12.) AC = ac, AB = ab, und der Winkel BAC = bac, so wird AB von ab, AC von ac, wegen der Gleichheit ihrer Größe und ihrer Richtung vollkommen gedeckt. Da aber dadurch nothwendig auch die Endpunkte C und c, B und b zusammenfallen, so müssen auch die diese Punkte vereinigenden Linien BC und bc einander gleich seyn, und sich decken, folglich auch die ganzen Figuren.

β) Im zweiten Falle trift die Congruenz nur dann zu, wenn beide Dreiecke spitz, oder beide stumpfwinklicht sind; denn es sey (Fig. 12) AC = ac, AB = ab, und der anliegende Winkel ACB = acb, so wird AC auf ac, CB auf cb, und weil AC = ac auch A auf a fallen. Daher muß auch B eben so weit von C, als b von c fallen, weil sonst gegen die Voraussetzung AB > oder < ab seyn müßte, wenn CB < oder > cb wäre. Ist aber CB = cb, so muß auch CAB = cab, und eben deßwegen (24. Zus. 5.) auch ABC = abc, folglich die Dreiecke congruent.

c) Wenn (Fig. 12.) alle Seiten gleich sind, und gleichen Seiten gleiche Winkel entgegenstehen (25.), so müssen auch alle Winkel einander gleich, die Dreiecke also congruent seyn.

27. Aehnlich sind Dreiecke, wenn nur alle Winkel einander gleich sind. Daraus folgt, daß sie zwar einander nicht decken, aber wegen der Gleichheit der Winkel doch immer zwei homologe Seiten auf einander fallen. Daher kann das kleinere Dreieck immer angesehen werden als ein Theil des ihm ähnlichen größern, der durch eine parallele Linie in demselben abgeschnitten wird. Sind nämlich die Dreiecke ACB und acb (Fig. 13.) ähnlich,

so wird acb ≃ ADE ein durch DE mit CB parallel abgeschnittener Theil von ACB.

28. Daher sind in ähnlichen Dreiecken die homologen Seiten (23. Zus. 4.) einander proportional, und umgekehrt; denn

a) wenn DE mit CB parallel in der Mitte von AP gezogen ist, so wird auch $AE = EB = \frac{1}{2} AB$, und $AD = DC = \frac{1}{2} AC$, folglich

$AC : AD = 1 : \frac{1}{2}$

$AB : AE = 1 : \frac{1}{2}$, also auch

$AC : AD = AB : AE$, oder

$AC : AB = AD : AE$.

Wäre hingegen

$Aq = qQ = \frac{1}{2} AQ$, so wird auch

$Ad = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{4} AC$, und

$Ae = \frac{1}{2} AE = \frac{1}{4} AB$, folglich

$AC : Ad = 1 : \frac{1}{4}$, und

$AB : Ae = 1 : \frac{1}{4}$, folglich auch

$AC : Ad = AB : Ae$, oder

$AC : AB = Ad : Ae = AD : AE$.

Wäre also überhaupt $Aq = \frac{1}{m} AP$, so wäre auch allgemein $Ad = \frac{1}{m} AC$, und $Ae = \frac{1}{m} AB$, folglich allgemein

$AC : Ad = 1 : \frac{1}{m}$

$AB : Ae = 1 : \frac{1}{m}$, und

$AC : Ad = AB : Ae$, oder

$AC : AB = Ad : Ae$:

Würde das Dreieck acb so auf das größere gebracht, daß der Winkel c mit C zusammenfällt, so wird ab = DP mit AB parallel; daher

CP : CD = CB : AC.

Fiele endlich B mit b zusammen, so würde ac parallel mit AC, folglich

BP : BE = CB : AB, die Behauptung also in jedem möglichen Falle gültig.

b) Umgekehrt, wenn AB : AC = ab : ac, und AC : BC = ac : bc, so sind die Winkel, welche homologen Seiten entgegengesetzt sind, gleich, die Dreiecke also ähnlich; denn wenn

ADE = acb, so ist ADE ∽ ACB, also auch abc ∽ ACB.

Zusatz. Auch die Segmente der Seiten eines parallel mit einer Seite geschnittenen Dreieckes sind in Proportion; denn da

AC : AD = AB : AE, so wird auch

AC — AD : AD = AB — AE : AE, oder

DC : AD = BE : AE.

29. Wenn (Fig. 14.) aus dem rechten Winkel des rechtwinklichten Dreieckes ACB auf die Hypothenuse AB die senkrechte Linie CD gezogen wird, so wird das Dreieck in zwei sich und dem Ganzen ähnliche Dreiecke getheilt; denn vergleicht man das Dreieck CDB mit dem Ganzen, so ist

der Winkel CDB = ACB = 90°

— — CAD gemeinschaftlich, also auch (24. Z. 5.)

— — ACD = CBA, folglich

das Dreieck ACB ∽ ACD, also auch

ACD ∽ BCD.

Zusatz 1. Daher ist auch die senkrechte Linie die mittlere geometrisch = proportionale zwischen den abgeschnittenen Theilen der Hypothenuse; denn da die Dreiecke ACD und BCD ähnlich sind, so sind auch die homologen Seiten AD und CD, DB und CD in Proportion (28.), folglich

$$AD : CD = CD : DB.$$

Zusatz 2. Daher ist auch $CD^2 = AD \cdot BD$.

30. In einem rechtwinklichten Dreiecke ACB (Fig. 14.) ist das Quadrat der Hypothenuse = der Summe der Quadrate der beiden Seiten; denn da (29.)

$$AD : CA = CA : AB, \text{ und}$$
$$DB : CB = CB : AB, \text{ folglich}$$
$$CA^2 = AD \cdot AB$$
$$CB^2 = DB \cdot AB, \text{ so ist}$$
$$CA^2 + CB^2 = AD \cdot AB + DB \cdot AB$$
$$= AB\,(AD + DB)$$
$$= AB \cdot AB$$
$$= AB^2.$$

Zusatz. Hieraus folgt, daß

$$CA^2 = AB^2 - CB^2$$
$$CA = \sqrt{AB^2 - CB^2}$$
$$CB^2 = AB^2 - CA^2$$
$$CB = \sqrt{AB^2 - CA^2}.$$

31. In einem gleichschenklichten Dreiecke abc (Fig. 15.) theilt eine aus der Spitze a auf die Basis bc senkrecht gezogene Linie ad die Basis in zwei gleiche Theile, denn da

der Winkel adb = adc = 90°, und wegen der Gleichheit der Seiten

acb = abc, so ist auch (24. Zus. 5.)

bad = dac; und da auch

die Seite ab = ac, so sind die Dreiecke abd und adc congruent, folglich

bd = dc.

β) Von den Vierecken.

32. Aus dem Dreiecke gehen alle übrigen Figuren hervor, und sind entweder reguläre, oder irreguläre, je nachdem die Dreiecke, aus welchen sie bestehen, oder die Seiten, welche sie begrenzen, einander gleich sind.

Zusatz 1. Hieraus sieht man, daß nach dem Dreiecke die einfachste Figur das Viereck ist.

Zusatz 2. Ein reguläres Viereck hat immer zwei entgegengesetzte Seiten parallel, aber entweder alle Seiten, oder nur die gegenüberstehenden gleich. Im ersten Falle heißt es, wie (Fig. 16.) abcd ein Quadrat, im zweiten wie (Fig. 17.) abcd ein Parallelogramm.

Zusatz. 3. In einem Parallelogramme sind die Winkel entweder alle rechte, oder alle schiefe. Jenes nennt man ein rechtwinklichtes (Rechteck, rectangulum), dieses ein schiefwinklichtes (Rhomboid), und wenn alle Seiten desselben gleich sind, einen Rhombus (Fig. 18.). Sind nur 2 Seiten mit einander parallel, wie in abcdg (Fig. 26.), so heißt das Viereck ein Trapez.

Zusatz 4. Eine gerade Linie, welche zwei entgegengesetzte Winkel mit einander verbindet, wie bd oder ac (Fig. 16. 17. 18), heißt eine Diagonale.

33. Jedes Viereck wird durch eine Diagonale in zwei congruente Dreiecke getheilt; denn weil (Fig. 16. 17. 18.) ad parallel mit bc ist, so ist (13.)

der Winkel adb = dbc
abd = bdc
bad = bcd,
die Seite ad = bc
ab = dc
bd = bd, folglich (26. a)

die Dreiecke abd und bcd congruent. Aus eben diesem Grunde auch adc ≌ abc.

Zusatz. 1. Wenn sich zwei Diagonalen durchschneiden, so werden auch die an dem Durchschneidungspunkte gebildeten entgegengesetzten Dreiecke congruent; denn (13.)

der Winkel edc = abe
ecd = bae
dec = aeb, und
die Seite dc = ab, folglich
△ dec ≌ △ aeb.

Auf dieselbe Weise läßt sich auch die Congruenz von aed und bec beweisen.

Zusatz 2. Weil in congruenten Dreiecken gleichen Winkeln gleiche Seiten entgegenstehen (25.), so ist ed = be, ae = ec; folglich theilt jede Diagonale die andere in zwei gleiche Theile.

34. In jedem Vierecke ist immer die Summe aller Winkel = 4 Rechten; denn
das Viereck ist = 2 Dreiecken = 4 Rechten (24.).

Zusatz 1. Daher ist immer die Summe zweier an einer Seite liegenden Winkel = 180°, weil (29. Zus. 1.) sie 2 innere entgegengesetzte Winkel an zweien durch

eine dritte durchschnittenen parallelen Linien bilden (13.).

Zusatz 2. Wenn daher ein Winkel eines Viereckes als rechter bekannt ist, so müssen auch die übrigen drei rechte seyn.

Zusatz 3. Die entgegengesetzten Winkel aber sind gleich, weil (Fig. 16. 17. 18.)

$$adb = dbc, \text{ und } bdc = abd, \text{ folglich}$$
$$adb + bdc = abd + dbc, \text{ oder}$$
$$adc = abc.$$

Eben so $bad = bcd$.

γ) Von den übrigen Vielecken.

35. Die Polygone haben, wie schon angezeigt worden ist, ihre Benennung von der Anzahl der sie begrenzenden Seiten, und sind, wie die Vierecke, entweder reguläre, oder unreguläre. Hier kann die Rede nur seyn von den regulären.

Zusatz. Die Polygone theilen sich auch in symmetrische und unsymmetrische, und heissen symmetrisch, wenn die entgegengesetzten Seiten derselben parallel und gleich sind.

36. Jedes Polygon kann entweder a) in so viele Dreiecke aufgelöset werden, als es Seiten hat — 2, oder b) in so viele, als es Seiten hat; je nachdem die Auflösung geschieht aus einem in dem Perimeter liegenden Winkel, oder aus einem inner dem Perimeter liegenden Punkte; denn

a) Wenn in dem Sechsecke abdefg (Fig. 19.) die Auflösung von dem Punkte d geschieht, so wird es

durch die Linien df, dg, gb in die Dreiecke fed, gdf, bgd, gab, also in $4 = 6 - 2$ △△ aufgelöst.

b) Geschieht aber die Auflösung von dem inner dem Perimeter gelegenen Punkte C (Fig. 20.), so wird es durch die Linien ae, bf, dg in die 6 Dreiecke acg, acb, bcd, dce, ecf, fcg aufgelöst.

Zusatz 1. Daher ist die Summe aller innern Winkel = zwei Male soviel rechten Winkeln, als das Polygon Seiten hat — 360°; denn nach der ersten Auflösung, bei welcher alle Winkel der entstandenen Dreiecke zu dem Polygon gehören, ist die Summe der Winkel derselben $= 4 \cdot 180°$ (24.) $= 4 \cdot 2 \cdot 90°$, also $= 2(6-2)\,90° = 720° = 2 \cdot 6 \cdot 90 - 360$; denn $2 \cdot 6 \cdot 90 = 1080$, folglich $2 \cdot 6 \cdot 90 - 360 = 1080 - 360 = 720°$.

Nach der zweiten Auflösung ist die Summe der Winkel der 6 Dreiecke $= 6 \cdot 180°$. Da aber die Summe der Winkel bei c, welche nicht dem Polygone gehören $= 360°$, so ist die Summe der innern Winkel $= 6 \cdot 180° - 360° = 6 \cdot 180° - 2 \cdot 180° = 4 \cdot 180° = 8 \cdot 90° = 2(6-2)\,90°$.

Zusatz 2. Was hier von dem Sechsecke gesagt worden ist, gilt auch offenbar von jedem andern Polygone, und wenn daher die Anzahl der Seiten $= n$, so wird allgemein die Summe aller innern Polygonwinkel $= (n-2)\,180° = 2(n-2)\,90°$.

Zusatz 3. Daher wird jeder Polygonwinkel = ihrer Summe dividirt durch die Anzahl der Seiten, und heißt diese v, $= \frac{(n-2)\,180°}{v} = \frac{2(n-2)\,90°}{v}$.

Zusatz 4. Daher ist die Summe der äußern Polygonwinkel, welche (Fig. 19.) durch die Verlängerung der Seiten ab nach α, bd nach β u. s. w. entstehen $= 360°$; denn sie ergänzen den innern Polygonwinkel zu $180°$, und daher ist die Summe der innern und äußern Polygonwinkel $= n . 180°$, folglich die Summe der äußern $= n . 180 - (n - 2) 180° = n . 180 - n . 180 + 360 = 360°$.

Anmerkung. Hier ist die Rede nur von Polygonen mit vorspringenden Winkeln. Sind in demselben auch zurücktretende Winkel, so ist die Summe der äußern Polygonwinkel $= 360 +$ so oft Male $180°$, als zurücktretende Winkel da sind; denn wenn ein solcher Winkel (Fig. 21.) in e ist, und zieht man die Linie fd, so wäre im Polygone abdfg die Summe der äußern Winkel $= 360°$. Aber im Polygone abdefg sind auch die Winkel efd, fed und edf äußere Winkel, und da sie das Dreieck fed bilden $= 180°$, folglich müssen auch sie $(= 180°)$ zu der ganzen Summe der äußern Winkel addirt werden, und da dasselbe von jedem solchen zurücktretenden Winkel wahr ist, so u. s. w.

37. Jedes symmetrische Polygon wird durch die Diagonalen so geschnitten, daß die am Durchschneidungspunkte entgegengesetzten Dreiecke gleich sind; denn es seyen (Fig. 22.) in dem Polygone abdefg die Diagonalen ae, bf, dg, die sich in c durchschneiden, gezogen, so ist $\triangle$ bcd $=$ fcg; denn weil bd parallel und $=$ fg ist, und beide durch bf und dg geschnitten werden, so ist

der Winkel cbd = cfg
cdb = cgf
bcd = fcg
bd = fg, folglich

△ bcd = △ fcg.

Derselbe Beweis läßt sich für jedes andere Paar der entgegengesetzten Winkel führen.

Zusatz. Daher schneiden sich auch alle Diagonalen der symmetrischen Vielecke zu gleichen Theilen.

38. Inner jedem regulären Polygone giebt es einen Punkt C (Fig. 20.), von welchem alle aus den Winkeln des Polygones gezogene Linien einander gleich sind; denn wenn diese Linien ac, bc, dc, ec u. s. w. sind, und die Winkel in gleiche Theile theilen, so sind alle die Dreiecke acb, bcd u. s. w. wegen der gleichen Basen ab, bd u. s. w., und der gleichen Winkel abc, bac, bcd u. s. w. gleichschenklicht und gleich. Weil aber überdieß eine Seite bc immer 2 Dreiecken gemeinschäftlich ist, so müssen ihre Scheitel auf denselben Punkt zusammenfallen, und sich daher in demselben Punkte, in welchem sich ac und bc durchschnitten haben, auch bc und dc, de und ec u. s. w. durchschneiden.

Zusatz 1. Daher kann in und um jedes Polygon ein Kreis beschrieben werden, so daß er im ersten Falle die Mittelpunkte der Seiten, im zweiten Falle die Spitzen der Polygonwinkel berührt.

Zusatz 2. Jeder Winkel am Mittelpunkte eines Polygones ist $= 4 \cdot 90 = 360°$, dividirt durch die Anzahl der Seiten $= \frac{360°}{n}$, folglich im Fünfecke $= 72°$, im Sechsecke $= 60°$ u. s. w.

Zusatz 3. Daher sind im Sechsecke alle Winkel = 60°, und jede Seite = Radius eines umschriebenen Kreises, folglich die Dreiecke acb, bcd u. s. w. gleichseitig und gleich.

δ) Von dem Kreise.

39. Je mehr man die Seiten eines Polygones vermehrt, desto zahlreicher und stumpfer werden die Winkel, unter welchen sich die Seiten durchschneiden, und desto kleiner die Seiten selbst. Daher nähert sich auch der Perimeter so eines Polygones immer mehr der Peripherie einer Kreisfläche, und nehmen wir an, dieser Winkel seyen unendlich viele, und die Seiten unendlich klein, so geht das Polygon in eine Kreisfläche über, so, daß man die Kreisfläche als ein Polygon von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten betrachten kann, in welchem die Diagonale zum Durchmesser wird.

40. Wenn (Fig. 23.) aus dem Mittelpunkte C zur Sehne DE die senkrechte Linie Cn gezogen, und bis A an dem Bogen verlängert wird, so theilt sie a) sowohl die Sehne, als b) den Bogen in zwei gleiche Theile; denn

a) da als Radien CD = CE, so ist das Dreieck DCE gleichschenklicht, und daher wird DE durch die senkrechte Cn (31.) in 2 gleiche Theile getheilt.

b) Weil AB der Durchmesser ist, so wird der Winkel BDA = BEA (16.), und weil die Sehne DB = BE, so wird auch der unterspannte Bogen DaB = BdE, also

der Bogen ADaB — DaB = AEdB — EdB, oder der Bogen DA = dem Bogen AE = ½ Bogen DAE.

Zusatz 1. Also geht jede gerade Linie, welche eine Sehne, und den ihr entsprechenden Bogen in 2 gleiche Theile theilt, und senkrecht darauf ist, durch den Mittelpunkt, und

Zusatz 2. jede Linie, welche vom Mittelpunkte aus eine Sehne und ihren Bogen in 2 gleiche Theile theilt, ist auf die Sehne senkrecht.

Zusatz 3. Daher sind Bögen, welche zwischen parallelen Sehnen liegen, einander gleich;
denn da der Bog. AFD = Bog. AGE, und
Bog. FA = Bog. AG, so ist auch
Bog. AFD — Bog. FA = Bog. AGE — Bog. AG, oder
Bog. DF = Bog. GE.

Zusatz 4. Da der Bogen DAE in 2 gleiche Theile durch CA getheilt wird, so wird es auch der Centriwinkel DCE, dessen Maas er ist.

41. Wenn aus was immer für einem Punkte der Peripherie C (Fig. 14.) auf den Durchmesser AB die senkrechte Linie CD gezogen wird, so ist sie die mittlere Proportionale zwischen den abgeschnittenen Theilen des Durchmessers; denn zieht man die Linien AC und CB, so entsteht der Peripheriewinkel ACB = 90° (16.). Die Dreiecke ACD und BCD sind daher ähnlich (27.), folglich AD : CD = CD : DB.

Zusatz. Daher ist auch CD^2 = AD . AB.

42. Der Radius ist immer senkrecht auf die Tangente an dem Berührungspunkte; denn es sey (Fig. 24.) die Tangente am Punkte A die Linie MAZ, ziehen wir mit ihr parallel die Sehne DE, und CA darauf senk-
recht,

recht, so muß er auch auf MAZ senkrecht seyn. Nun ist aber eine aus dem Mittelpunkte auf eine Sehne senkrecht gezogene Linie der Radius, folglich u. s. w.

Zusatz 1. Da auf einen Punkt A einer Linie CA nur Eine Linie senkrecht seyn kann, so ist auch an einem Punkte der Peripherie nur Eine Tangente möglich.

Zusatz 2. Eine auf die Tangente am Berührungspunkte senkrechte Linie fällt auf den Radius.

b) Maas der Flächen.

43. Da eine Fläche eine Ausdehnung nach der Länge und Höhe (Breite) zugleich ist, so muß sie auch nach diesen beiden Rücksichten gemessen werden.

Zusatz 1. Ist daher eine Linie einer Figur als Ausdruck der Länge (Basis) angenommen, so muß eine andere auf sie senkrechte Linie der Ausdruck der zweiten Dimension (der Höhe) seyn, es mag diese nun in oder außer die Figur fallen.

Zusatz 2. Das Maas aller Figuren geht daher aus der Länge und Breite (Höhe) hervor.

Zusatz 3. Den Raumesinhalt einer Figur nach Quadraten angeben, heißt man die Figur quadriren.

44. Der Raumesinhalt eines Dreieckes ist = dem $\frac{1}{2}$ Produkte aus der Basis in die Höhe; denn wenn (Fig. 15.) cb die Basis ist, so ist die darauf senkrechte Linie ad die Höhe. Nun ist das Dreieck eine Figur, deren Breite cb von der Basis bis zum Scheitel a in jedem Punkte der Höhe ad um ein Gleiches abnimmt, und an dem Scheitel = 0 wird. Daher bilden die einzelnen Theile dieser Breite eine steigende arithmetische

Progression, die zum ersten Gliede o, zum letzten die Breite bc, und zur Anzahl der Glieder die Punkte der Höhe = ad hat. Es ist aber die Summe einer arithmetischen Progression (Alg. 32.) $S = (a + w)\frac{n}{2}$, also in unserm Falle die Summe = dem Raumsinhalte des ganzen Dreieckes $= (o + bc)\frac{ad}{2} = \frac{bc \,.\, ad}{2}$.

Zusatz. Dasselbe gilt, wenn (Fig. 25) die Höhe ad ausser das Dreieck abc auf die verlängerte Basis auf d hinausfällt; denn auch hier giebt die senkrechte Linie ad die Zahl der Zunahmen von a nach bc.

45. Der Raumesinhalt eines Viereckes ist = dem Produkte aus der Basis in die Höhe; denn jedes Viereck (Fig. 16. 17.) besteht (34.) aus den 2 gleichen Dreiecken, deren Basis ab, Höhe ad ist, folglich ist der ganze Raumesinhalt = dem der 2 Dreiecke, oder (44.) $= 2 \,.\, \frac{bd \,.\, ab}{2} = bd \,.\, ab$.

Zusatz 1. Fällt die Höhe, wie (Fig. 26) ce ausser die Figur auf die verlängerte Basis in e, so ist ce die Höhe des Dreieckes cbd = ce, des Dreieckes abc = bf = ce. Also auch hier der Raumesinhalt = bd . ce.

Zusatz 2. Da bei einem rechtwinklichten Vierecke (Fig. 16. 17.) immer eine Seite die Basis, die andere die Höhe ist, so kann man auch sagen, sein Raumesinhalt sey gleich dem Produkte aus den 2 anliegenden Seiten.

46. Der Raumesinhalt eines regulären Polygones ist = dem ½ Produkte aus einer auf eine Seite

vom Mittelpunkte senkrecht gezogenen Linie in den Perimeter des Polygones; denn wenn (Fig. 20.) c h so eine senkrechte Linie ist, so ist sie die gemeinschaftliche Höhe aller Dreiecke g c f, f c e, g c a u. s. w., aus welchen das Polygon besteht, und jedes solche Dreieck ist (44.) $= \frac{hc \cdot gf}{2}$, alle Dreiecke zusammen also, oder der Raumesinhalt des ganzen Polygones $= n \cdot \frac{hc \cdot gf}{2}$. Es ist aber $n \cdot gf =$ Perimeter, folglich ꝛc.

Zusatz. Ist daher in einem bestimmten Vielecke eine Seite, oder der Perimeter und die senkrechte Linie bekannt, so kennt man auch den Raumesinhalt des ganzen Polygones.

47. Der Raumesinhalt einer Kreisfläche ist = dem ½ Produkte ans dem Radius in die Peripherie; denn da jeder Kreis betrachtet werden kann als ein unendliches Vieleck (39.), so kann auch die Kreisfläche in Dreiecke aufgelöset werden, deren Basen zusammen die ganze Peripherie ausmachen, und deren gemeinschaftliche Höhe der Radius ist, der auf jeden Punkt der Peripherie senkrecht ist (42.). Daher wird auch hier der Raumesinhalt = dem halben Produkte u. s. w.

Zusatz 1. Dieser Raumesinhalt wird daher auch = dem eines Dreieckes, dessen Basis = Peripherie, und dessen Höhe = Radius ist (44.).

Zusatz 2. Wäre die Peripherie $= p$, und Radius $= r$, so wird der Raumesinhalt $= \frac{p \cdot r}{2}$, oder wenn der Durchmesser d ist, weil $r = \frac{d}{2}$, der Raumesinhalt $= \frac{p \cdot d}{4}$.

Zusatz 3. Nach Ludovicus a Ceylen ist das Verhältniß des Durchmessers zu der Peripherie = 200 : 628 = 100 : 314 = 1 : 3,1415 . . . Metzius setzt zwar dafür das noch genauere Verhältniß = 113 : 355. Allein gewöhnlich bedient man sich des ersten in der Anwendung viel bequemeren Verhältnisses, und es ist daher immer für einen bestimmten Kreis

$$d : p = 1 : 3{,}1415$$

$$d = \frac{p}{3{,}1415}$$

$$p = d \cdot 3{,}1415, \text{ und}$$

drückt man allgemein 3,1415 durch π aus,

$$d = \frac{p}{\pi}$$

$$p = d \cdot \pi.$$

Zusatz 4. Daher wird auch der Raumesinhalt einer Kreisfläche $= \frac{d\pi \cdot d}{4} = \frac{d^2\pi}{4} = r^2\pi.$

c) Vergleichung der Flächen miteinander.

48. Allgemein müssen nothwendig alle Flächen dem Raumsinhalte nach sich so zu einander verhalten, wie die Größen, welche ihr Maas bestimmen.

49. Daher stehen Dreiecke ihrem Raumesinhalte nach im zusammengesetzten Verhältnisse der Basis und der Höhe; denn (Fig. 12.) ist (44.)

$$\triangle X = \frac{cb \cdot ad}{2}$$

$$\triangle Z = \frac{CB \cdot AD}{2}, \text{ folglich}$$

$$X : Z = \frac{cb \cdot ad}{2} : \frac{CB \cdot AD}{2} = cb \cdot ad : CB \cdot AD.$$

Zusatz 1. Wären die Basen gleich, d. i. $CB = cb$; so würde

$$X : Z = ad : AD,$$ und

wären die Höhen gleich, d. i. $AD = ad$, so wäre

$$X : Z = cb : CB.$$

Zusatz 2. Also sind die Raumesinhalte zweier Dreiecke gleich, wenn $cb \cdot ad = CB \cdot AD$, und daher entweder ihre Höhen und Basen gleich sind, oder die Höhen sich umgekehrt verhalten, wie die Basen

$$(CB : cb = ad : AD).$$

Zusatz 3. Aehnliche Dreiecke verhalten sich daher auch wie die Quadrate der homologen Seiten; denn da (Fig. 13.)

$$\triangle ACB : \triangle acb = \frac{AP \cdot CB}{2} : \frac{ap \cdot cb}{2} = AP \cdot CB : ap \cdot cb,$$

und (28.) $AP : ap = CB : cb$, so ist auch

$\triangle ACB : \triangle acb = CB^2 : cb^2$. Da ferner

$$CB : cb = AB : ab$$
$$= AC : ac,$$ so ist auch

$$\triangle ACB : \triangle acb = AB^2 : ab^2$$
$$= AC^2 : ac^2.$$

50. Bei Vierecken (Fig 16. 26.) tritt aus demselben Grunde dasselbe Verhältniß ein; denn (45.)

$$A = ab \cdot bc$$
$$B = bd \cdot ce,$$ folglich
$$A : B = ab \cdot bc : bd \cdot ce.$$

Zusatz 1. Daher auch $A = B$, wenn $ab \cdot bc = bd \cdot ce$, und wenn $ab = ce$
$A : B = bc : bd$; wenn aber $bc = bd$
$A : B = ab : ce$.

Zusatz 2. Daher auch (49. Zus. 3.)

$$A : B = AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2.$$

51. Die Raumesinhalte regulärer Polygone stehen im zusammengesetzten Verhältniß der Länge einer Seite L, l, der Anzahl der Seiten N, n, und der aus dem Mittelpunkte auf eine Seite senkrecht gezogenen Linie H, h; denn (46.) ist (Fig. 20. 27.)

$$A = \frac{N.L.H}{2},$$

$$B = \frac{n.l.h}{2}, \text{ folglich}$$

$$A : B = N.L.H : n.l.h.$$

Zusatz 1. Die Raumesinhalte der Polygone derselben Gattung, bei welchen $N = n$,

$$A : B = L.H : l.h.$$

Zusatz 2. Bei Polygonen verschiedener Gattung aber, wenn $L = l$

$$A : B = N.H : n.h,$$

wenn $H = h$

$$A : B = N.L : n.l.$$

Zusatz 3. Da der Perimeter $P = N.L$, so wird auch

$A : B = P.H : p.h$, und wenn daher

$P = p$

$A : B = H : h$, wenn

$H = h$

$A : B = P : p.$

52. Da eine Kreisfläche selbst Fläche eines Unendlicheckes ist, so muß auch unter ihren Raumesinhalten dasselbe Verhältniß obwalten, wie unter denen der Polygone, in welchen

$N = P$, $L = o$, $H =$ Radius $= R$ ist, folglich

$$A : B = P.R : p.r.$$

Zusatz. Da (47. Zus. 3.) $P = D\pi$, und $R = \frac{D}{2}$, so wird

$$A : B = \frac{D\pi . D}{2} : \frac{d\pi d}{2}$$
$$= D^2\pi : d^2\pi$$
$$= D^2 : d^2.$$

53. Die Perimeter ähnlicher Figuren verhalten sich wie die homologen Seiten oder Dimensionen; denn da der Perimeter = der Summe der Seiten ist, so wird

$$P : p = N . L : n . l.$$

Da aber in ähnlichen Figuren $N = n$, so wird

$$P : p = L : l,$$

und, da wegen der Aehnlichkeit der Figuren auch die Dreiecke, aus welchen die Figuren bestehen, ähnlich sind, in ähnlichen Dreiecken aber die homologen Seiten im Verhältniß sind, so ist auch $P : p = L : l =$ jede andere homologe Seite.

Von den Körpern. (Stereometrie.)

a) Eigenschaften derselben.

54. Da (2.) ein geometrischer Körper (Solidum, corpus) ein von Flächen begrenzter Raum ist, so hat er eine Ausdehnung nicht nur der Länge und Höhe, sondern auch der Tiefe nach.

Zusatz 1. Die Winkel, welche die begrenzenden Flächen machen, heissen körperliche Winkel (ang. solidus), welche gleich oder ähnlich sind, je nachdem sie von gleichen oder ähnlichen Flächen gebildet werden.

Zusatz 2. Die Körper haben entweder eigene Namen, wie das Prisma, die Pyramide, der Kegel und der Cylinder, oder erhalten sie von der Anzahl der Flächen, aus welchen sie entstanden sind, und heissen dann allgemein Polyedra.

Zusatz 3. Die unterste Fläche, auf welcher der ganze Körper steht, heißt seine Basis, die oberste Fläche oder der oberste Winkel sein Scheitel (vertex), eine von dem Scheitel auf die (wenn es nothwendig ist, verlängerte) Basis seine Höhe (altitudo), und eine senkrechte, vom Mittelpunkte der Basis auf den Mittelpunkt des Scheitels gezogene Linie, die Achse (Axis).

Zusatz 4. Die Oberfläche (superficies) eines Körpers ist die Summe der Raumesinhalte aller begrenzenden Flächen, der körperliche oder cubische Inhalt (Soliditas) aber der ganze durch die Flächen begrenzte Raum.

Zusatz 5. Körper sind gleich, wenn ihre homologen Dimensionen gleich, ähnlich, wenn diese nur proportional sind.

Zusatz 6. Es kann keinen Körper geben, der weniger als 3 begrenzende Flächen hat.

55. Ein Prisma (Fig. 27.) ist ein Körper, dessen Basen abc und def gleich, und dessen begrenzende Flächen dabe, ebcf, dacf Parallelogramme sind. Sind die Achse, und die Seitenflächen auf die Basis senkrecht, heißt es ein senkrechtes, ausser dem ein schiefes Prisma (Fig. 28), welche beide nach der Anzahl der Seiten der Basis, 3, 4, 5 u. s. w. seitige Prismen seyn können.

Zusatz 1. Ist die Basis ein Viereck, so heißt der Körper ein Parallelopipedon, und ist das Viereck ein Quadrat, ein Würfel (Cubus).

Zusatz 2. Ist die Basis ein Unendlicheck (Kreis), so geht (Fig. 30.) das Prisma in den Cylinder über.

56. Die Pyramide (Pyramis) ist ein Körper, dessen Basis (Fig. 31.) abcde ein Polygon, dessen Scheitel eine Spitze, und dessen begrenzende Flächen Dreiecke sind. Auch sie kann entweder eine senkrechte oder eine schiefe (Fig. 32.) seyn.

Zusatz 1. Ist die Basis ein Unendlicheck, so geht die Pyramide in den Kegel (Fig. 33. 34.) über.

Zusatz 2. Wird die Pyramide oder der Kegel durch eine mit der Basis parallelen Fläche fghik (Fig. 31.) fghi (Fig. 33.) durchschnitten, so heißt der untere Theil eine abgekürzte Pyramide und abgekürzter Kegel (Pyramis truncata, conus trunc.)

57. Ein reguläres Polyedrum ist ein Körper, welcher von regulären Flächen, die unter gleichen körperlichen Winkeln zu einander geneigt sind, begrenzt wird.

Zusatz 1. Es sind nicht mehr als 5 reguläre Polyedra möglich, nämlich a) das Tetraedrum, b) Octoedrum, c) Icosaedrum, d) der Würfel, und e) das Decaedrum.

Zusatz 2. Ein Polyedrum von unendlich vielen Seiten geht in die Kugel (Sphaera) über, in welcher alle Punkte der Oberfläche von einem inner derselben liegenden Punkte (Mittelpunkt) gleichweit entfernet sind.

b) Maas der Körper.

α) ihrer Oberflächen.

58. Die Oberfläche eines Prisma abcdef (Fig. 27) (ohne Einrechnung der oberen und untern Basis) ist = dem Produkte aus dem Perimeter der Basis in die Höhe; denn
die Oberfläche der Pyramide ist = der Summe der Flächen der begrenzenden Parallelogramme ab, af und ac; nun ist aber (45.)

das Parallelogramme $db = ab \, . \, da$

$af = ac \, . \, da$

$ec = bc \, . \, fc = bc \, . \, da$,

die ganze Oberfläche also $= ab \, . \, da + ac \, . \, da + bc \, . \, da$

$= (ab + bc + ac) \, da$

= Perimeter × Höhe.

Zusatz 1. Dasselbe gilt von dem schiefen Prisma (Fig. 28).

Zusatz 2. Um die ganze Oberfläche (mit Einrechnung der beiden Basen) zu erhalten, müssen auch diese dazu gerechnet werden. Ist z. B. das Prisma ein dreiseitiges, und cg die Höhe des Dreieckes, so ist die Summe der beiden Basen (44.) $= 2 \, . \, \frac{ab \, . \, gc}{2}$ $= ab \, . \, gc$, folglich die ganze Oberfläche

$= (ab + bc + ca) \, da + ab \, . \, gc$.

59. Da der Cylinder (55. Zus. 2.) ein Prisma von unendlich vielen Seiten ist, so wird auch seine Oberfläche (ohne den Basen) = Peripherie × Höhe. Da aber (47. Zus. 3.) $p = d\pi$, so wird die Oberfläche des Cylinders $= d\pi$. Höhe,

Zusatz 1. es mag der Cylinder ein senkrechter (Fig. 29.) oder ein schiefer (Fig. 30.) seyn.

Zusatz 2. Die ganze Oberfläche ist daher, weil die Basen Kreisflächen sind, eine Kreisfläche, aber (47.) $= \frac{p \cdot r}{2}$, folglich die Summe der 2 Basen $= 2 \cdot \frac{p \cdot r}{2}$ $= p \cdot r$ ist $= p \cdot \text{Höhe} + p \cdot r = p\,(\text{Höhe} + r)$.

Zusatz 3. Da aber die Kreisfläche auch $= \frac{d^2 \pi}{4}$, folglich die Summe der 2 Basen $= \frac{d^2 \pi}{2}$, und $p = d\pi$ ist, so wird die ganze Oberfläche des Cylinders auch

$$= d^2 \pi + d\pi \times \text{Höhe} = d\pi\,(d + \text{Höhe}).$$

60. Die Oberfläche einer senkrechten Pyramide (Fig. 31.) (ohne Basis) ist = dem $\frac{1}{2}$ Produkte aus dem Perimeter der Basis in eine Linie, welche von der Spitze senkrecht auf eine Seite der Basis gezogen wird; denn die Oberfläche ist = der Summe aller Seiten, also $= \triangle\, avb + \triangle\, bvc + cvd + dve + eva$. Da aber diese Dreiecke gleich, und jedes dieselbe Höhe $= vl$ hat, so ist ihre Summe = der Oberfläche $= \frac{ab \cdot vl}{2}$

$$+ \frac{bc \cdot vl}{2} + \frac{cd \cdot vl}{2} + \frac{de \cdot vl}{2} + \frac{ae \cdot vl}{2}$$

$$= \frac{(ab + bc + cd + de + ac)\, vl}{2}.$$

Zusatz 1. Um die ganze Oberfläche mit der Basis zu erhalten, muß diese einzeln berechnet und addirt werden.

Zusatz 2. Ist die Pyramide eine schiefe (Fig. 32.), so hat jedes Dreieck eine andere Höhe, folglich muß auch

jedes einzeln berechnet, und zu einander addirt werden, um die Oberfläche zu geben.

61. Da der Kegel (Fig. 33) eine Pyramide von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten ist (56. Zus. 1.), so ist auch seine Oberfläche (ohne Basis) = dem $\frac{1}{2}$ Produkte aus der Peripherie in eine von der Spitze an einen Punkt der Peripherie senkrecht gezogenen Linie = vl.

Zusatz 1. Da die Peripherie = $d\pi$, so wird die Oberfläche des Kegels = $\frac{d\pi \cdot vl}{2}$.

Zusatz 2. Die ganze Oberfläche mit Einrechnung der Basis = $\frac{d^2\pi}{4}$, daher = $\frac{d^2\pi}{4} + \frac{d\pi \cdot vl}{2}$

$$= \left(\frac{d}{4} + \frac{vl}{2}\right) d\pi.$$

Zusatz 3. Von dem schiefen Kegel gilt eben das, was oben (60. Zus. 2.) von der schiefen Pyramide gesagt worden ist.

62. Die Oberfläche einer abgekürzten Pyramide (Fig. 31.) ist = dem $\frac{1}{2}$ Produkte aus dem Perimeter der beiden Basen in die senkrechte Linie zwischen den Seiten der Basen; denn die Seiten sind die Vierecke fabg, gbch, hedi u. s. w. Da die kleinsten Theile dieser Flächen von oben nach unten eine steigende arithmetische Reihe bilden, so ist ihre Fläche

$$= S = (a + w)\,\frac{n}{2}, \text{ also}$$

$$= (hi + cd)\frac{ol}{2} = (gh + bc)\,\frac{ol}{2} \text{ u. s. w.,}$$

und daher die Summe dieser Flächen = der Oberfläche der abgekürzten Pyramide

$$=(fg+ab+gh+bc+hi+cd+ik+de+fk+ae)\frac{ol}{2}$$

$$=\Big((fg+gh+hi+ik+fk)(+ab+bc+cd+de+ac)\Big)\frac{ol}{2}$$

$$=(fghik+abcde)\frac{ol}{2}.$$

Zusatz 1. Daher ist auch die Oberfläche des abgekürzten Kegels abce (Fig. 33) ebenfalls = dem $\frac{1}{2}$ Produkte aus den Peripherien der Basen in die auf sie senkrechte Linie, oder, wenn die Durchmesser D, d heissen $= (D+d)\frac{ec\,.\,\pi}{2}$.

Zusatz 2. Da die Basen in den abgekürzten Pyramiden und Kegeln von gh bis bc, und von de bis bc in einer arithmetischen Progression wachsen, so ist die Oberfläche derselben auch = dem $\frac{1}{2}$ Produkte aus einem in der Mitte zwischen ihnen liegenden Perimeter in die Höhe ol oder ec. (Alg. 32. Zus. 4.).

Zusatz 3. Heißt daher der Durchmesser dieser mittleren Peripherie an dem abgekürzten Kegel δ, so wird seine Oberfläche $= \frac{\delta\,.\,\pi\,.\,ec}{\varepsilon}$.

63. Die Oberfläche eines regulären Polyedrums ist = dem Produkte aus dem Raumesinhalte einer begrenzenden Fläche in die Anzahl derselben; denn ein reguläres Polyedrum besteht aus gleichen regulären Flächen, welche zusammen die ganze Oberfläche derselben ausmachen. Daher der Raumesinhalt einer derselben so oft genommen, als solche Flächen da sind, die Oberfläche giebt.

64. Die Oberfläche einer Kugel ist = dem Produkte aus der Peripherie eines größten Kreises in den Durchmesser; denn

wenn man (Fig. 34.) an dem Punkte d die unendlich kleine Tangente mn, und senkrecht zu dem Durchmesser ab die Linie do annimmt, so ist do der Radius die mittlere Peripherie, welche mit der halben Seitenlinie mn = der Oberfläche des abgekürzten Kegels nmgh ist. Zieht man die senkrechte Linie ne und den Radius cd, so sind die Dreiecke mne und cdo ähnlich, weil doc = men = 90°, der Winkel nme = ndf, und da dieser von der Tangente dn und der Sehne df gebildet wird, so ist (15.) sein Maas der ½ Bogen daf = Bog. da. Dieser Bogen aber ist auch das Maas des Centriwinkels dca, folglich dca = ndf = nme, und daher auch der dritte Winkel cdo = mno, die Dreiecke also ähnlich (27.) und die homologen Seiten im Verhältniß (28.), also

cd : do = mn : ne, und weil ne = rs,

cd : do = mn : rs.

Ist nun cd der Radius eines größten Kreises P der Kugel, do der Radius des Kugelabschnittes daf, so ist

P : p = cd : do, folglich auch

P : p = mn : rs, und

P . rs = p . mn. Es ist aber (62. Zus. 2.)

p . mn = Oberfläche des abgekürzten Kegels nmhg, also die Oberfläche desselben = P . rs = der Peripherie eines größten Kreises × mit der Höhe rs. Daher wird die Summe der Oberflächen aller abgekürzten Kegel, welche um adbfa gedacht werden können

= P . ab.

Wenn wir die Seite mn des abgekürzten Kegels für unendlich klein setzen, so ist der Unterschied zwischen dem Kegel und dem entsprechenden Theile der Kugel auch nur unendlich klein, folglich auch der Unterschied zwischen der Summe der Oberflächen aller abgekürzten und der Oberfläche der Kugel nur unendlich klein = o, also auch diese = P . ab.

Zusatz 1. Da P = d . π, und ab = d ist, so wird diese Oberfläche auch = dπ . d = $d^2 \pi$.

Zusatz 2. Da die Fläche eines größten Kreises (47. Zus. 4.) $\frac{d^2 \pi}{4}$, so ist die Oberfläche = $\frac{4 d^2 \pi}{4}$ = dem vierfachen Raumesinhalte eines größten Kreises.

Zusatz 3. Wenn die Höhe und der Durchmesser eines Cylinders = d, so wird seine Oberfläche (ohne Basen) gleichfalls (59.) = dπ . d = $d^2 \pi$ = der Oberfläche der Kugel, deren Durchmesser = d ist, also auch = 4 größten Kreisen.

Zusatz 4. Rechnet man zu der Oberfläche des Cylinders auch die Fläche seiner Basen, so ist auch jede Base = einem größten Kreise, also die ganze Oberfläche = 6 größten Kreisen. Daher verhält sich bei gleichen Durchmessern und Höhen die Oberfläche eines Cylinders zu der Oberfläche der Kugel = 6 : 4 = 3 : 2.

β) Maas ihrer körperlichen Inhalte.

65. Der körperliche Inhalt eines Prisma's (Fig. 27. 28.) ist = dem Raumesinhalte der Basis in die Höhe; denn wenn wir das ganze Prisma in unendlich viele unendlich kleine Theile getheilt denken, so ist die Summe aller Theile = dem Prisma, diese Summe aber = Basis × der Höhe, also rc. rc.

Zusatz. Der körperliche Inhalt eines Cylinders also (Fig. 29.) = Basis × Höhe, und weil die Basis eine Kreisfläche ist $= \frac{d^2 \pi}{4} . vp$ und (Fig. 30.) $= \frac{d^2 \pi}{4} . cg$.

66. Der körperliche Inhalt der Pyramide ist = $\frac{1}{3}$ des auf derselben Basis möglichen Prisma's; denn, wenn man (Fig. 35.) das Prisma dabcf aus einem Winkel d zu der entgegengesetzten Seite der Basis bc so schneidet, daß dadurch die Pyramide dabcd abgeschnitten wird, welche ihren Scheitel in d, und die dem Prisma gemeinschaftliche Basis abc hat, so bleibt dann der Körper defbc, welcher einen Winkel bei bc und die Basis def hat.

Schneidet man auch diesen Körper wieder aus b nach df, so zerfällt er wieder in 2 Pyramiden, welche die gleichen Basen bef und bcf, und den gemeinschaftlichen Scheitel in d, folglich auch gleiche Höhe haben.

Diese Pyramiden sind einander gleich, indem die zwei letztern gleiche Basis und Höhe haben, und eine derselben bdef, für deren Basis def, und für deren Scheitel b angenommen werden kann, dadurch auch = der ersten abgeschnittenen Pyramide, folglich jede einzelne Pyramide = $\frac{1}{3}$ des Prisma wird.

Zusatz 1. Nachweisung durch ein auf diese Weise geschnittenes Prisma.

Zusatz 2. Daher ist auch der (Fig. 33.) körperliche Inhalt des Kegels = $\frac{1}{3}$ des körperlichen Inhaltes eines Cylinders, welcher auf derselben Basis gedacht wird, folglich (65. Zus.) $\frac{d^2 \pi}{4} . \frac{vp}{3} = \frac{d^2 \pi . vp}{12}$.

67. Der

67. Der körperliche Inhalt eines **regulären Polyedrum** ist = dem Produkte aus der Oberfläche in $\frac{1}{6}$ seiner Höhe; denn jedes Polyedrum besteht aus so vielen in dem Mittelpunkte mit ihren Scheiteln sich vereinigenden gleichen Pyramiden, als das Polyedrum Seitenflächen hat. Da nun jede Pyramide = Basis × $\frac{1}{3}$ Höhe, so ist die Summe aller Pyramiden = Oberfläche × $\frac{1}{3}$ Höhe. Es ist aber die Höhe des Polyedrums = $\frac{1}{2}$ Höhe einer Pyramide, daher $\frac{1}{3}$ Höhe derselben = $\frac{1}{6}$ Höhe des Polyedrums, folglich der körperliche Inhalt des Polyedrums = Oberfläche × $\frac{1}{6}$ Höhe.

Zusatz. Ist daher eine Seitenfläche A und die Anzahl der Seiten = n, so ist die ganze Oberfläche = nA, und der körperliche Inhalt = nA × $\frac{1}{6}$ Höhe.

68. Der körperliche Inhalt einer **Kugel** ist = ihrer Oberfläche × $\frac{1}{3}$ Radius; denn (Fig. 34.) die Kugel ambh ist = einem Polyedrum von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten, folglich ist auch ihr körperlicher Inhalt = Oberfläche × $\frac{1}{6}$ Höhe. Die Höhe aber ist = Durchmesser = 2 Radien, folglich $\frac{1}{6}$ Höhe = $\frac{1}{6}$ Durchmesser = $\frac{1}{3}$ Radius, also ꝛc. ꝛc.

Zusatz 1. Da die Oberfläche der Kugel (64. Zus. 2.) = 4 Flächen ihres größten Kreises = $\frac{4d^2\pi}{4}$ = $d^2\pi$, so ist der körperliche Inhalt = 4 größten Kreisen × $\frac{1}{3}$r = $d^2\pi \cdot \frac{1}{3}r = 4r^2\pi \cdot \frac{r}{3} = \frac{4r^3\pi}{3} = \frac{d^3\pi}{6}$.

γ) Vergleichung der Körper untereinander.

69. Die Körper verhalten sich zu einander wie ihre Basen und Höhen. Dieses geht aus der ganzen Behandlung des Maases der körperlichen Inhalte hervor.

Zusatz 1. Wenn daher von 2 Körpern X und Z die Höhen A, a, die Basen BC und bc sind, so wird

$$X : Z = A . BC : a . bc.$$

Zusatz 2. Körper sind daher gleich, wenn ABC = abc ist, und daher, wenn entweder A = a, und BC = bc, oder wenn A : a = bc : BC ist.

Zusatz 3. Aehnliche Körper, deren homologe Seiten alle proportional sind, verhalten sich wie die Cuben der homologen Seiten; denn wenn

$$A : a = B : b = C : c, \text{ so wird}$$

$$X : Z = A^3 : a^3$$

$$= B^3 : b^3$$

$$= C^3 : c^3.$$

70. Die körperlichen Inhalte eines Cylinders, einer Kugel, und eines Kegels bei gleichen Durchmessern der Basen und gleichen Höhen verhalten sich = 3, 2, 1; denn nennen wir einen größten Kreis p, so ist

der Cylinder A (65. Zus.) $= p . d = \frac{3}{3} pd$,

die Kugel B (68.) $= 4p . \frac{d}{6} = \frac{2}{3} pd$,

der Kegel C (66. Zus.) $= p . \frac{d}{3} = \frac{1}{3} pd$, also

$$A, B, C = 3, 2, 1.$$

Praktische Aufgaben.

71. Aus den vorgetragenen Elementargrundsätzen der Geometrie gehen alle bei Verzeichnung von geometrischen Figuren und Ausmessung einer Fläche vorkommende Operationen als eben so viele Folgesätze hervor.

a) Auf dem Papiere.

72. Die Grundoperation ist „eine gerade Linie zu ziehen.“ Es ist nicht nothwendig, erst zu sagen, daß sie auf dem Papiere mit einem Lineale verzeichnet werden muß.

73. Eine senkrechte Linie aufrichten

a) aus einem Punkte, der außer der geraden Linie liegt, wie (Fig. 36.) von c auf ab. Man durchschneide durch einen aus c gezogenen Kreisbogen die gegebene Linie in a und b. Aus a und b ziehe man unter demselben Radius zwei sich in o durchschneidende Bögen, so ist die durch c und o gezogene Linie auf ab senkrecht; denn o ist von a und b gleichweit entfernet (11.).

b) Von einem in der Linie ab liegenden Punkte c (Fig. 37.).

Man beschreibe aus c unter was immer für einem Radius auf ab den Halbkreis apb, unter einem Radius, welcher größer als cp ist, von a und b zwei sich in o durchschneidende Bögen, so ist die durch o und c gezogene Linie auf c senkrecht, weil o von a und b und c von a und b gleichweit entfernet ist (11.).

c) An dem Endpunkte a der Linie ab (Fig. 38).

Man ziehe unter einem beliebigen Radius ac an dem gegebenen Punkte a einen Kreis, welcher die (wenn es nothwendig ist, verlängerte) Linie ab in d durchschneidet. Durch d und c ziehe man den Durchmesser de, so ist ea senkrecht auf a; denn der Peripheriewinkel ead = 90° (16.).

Zusatz. Mechanisch zieht man eine senkrechte Linie durch einen Winkelhacken oder Transporteur. Beschreibung und Gebrauch dieser Instrumente mündlich.

74. Parallellinien ziehen

a) zu ab (Fig. 39) in einem beliebigen Abstande. Man bestimme sich einen beliebigen Punkt c in der gegebenen Linie ab, und ziehe um ihn mit einem beliebigen Radius einen Bogen ge. In diesem Bogen erwähle man was immer für einen Punkt d, und ziehe um ihn mit dem vorigen Radius den Bogen ck, mache gd = ck, so ist die durch d und k gezogene Linie zu ab parallel; denn der Winkel gcd ist = dem Winkel cdk (13.).

b) Durch einen gegebenen Punkt o (Fig. 40.). Man beschreibe mit einem beliebigen Radius aus dem gegebenen Punkte einen Bogen ap. Aus dem Punkte, in welchem dieser die Linie ab durchschneidet, ziehe man einen andern Bogen ob mit demselben Radius. Wird ob = ap gemacht, und durch o und p eine Linie gezogen, so ist sie parallel zu ab; denn es ist der Winkel oab = dem Winkel aop (13.).

Zusatz 1. Man kann eine parallele Linie auch dadurch ziehen, daß man aus 2 Punkten der gegebenen Linie m und a die gleichen senkrechten Linien an, om

(73.) errichtet, und durch ihre Endpunkte die Linie po zieht.

Zusatz 2. Mechanisch zieht man eine parallele Linie durch das Parallelen-Lineal (Paralletismus) oder mittels eines Lineales, und eines rechtwinklichten Dreieckes. — Beschreibung und Gebrauch dieser Anrichtungen mündlich.

75. Einen Winkel zeichnen, welcher einem gegebenen gleich ist.

Der gegebene Winkel sei (Fig. 41.) ACB. Aus dem Scheitel desselben C beschreibe man zwischen seinen Schenkeln mit einem beliebigen Radius den Bogen MN. Mit demselben Radius ziehe man auf der für einen Schenkel des zweiten Winkels angenommenen Linie cb den unbestimmt großen Bogen mo, mache mn = MN, und ziehe durch m und c den zweiten Schenkel ca, so ist (25.) eben deßwegen der Winkel acb = Winkel ACB.

Zusatz. Dasselbe kann mechanisch durch Hilfe eines Transporteurs, oder eines Dreispitzes geschehen.

76. Einen gegebenen a) Winkel, oder b) Bogen in 2 gleiche Theile theilen.

Aus c (Fig. 42.) beschreibe man einen Bogen mpn, ziehe aus m und n mit gleichen Radien die sich in o durchschneidenden Bögen, und ziehe durch o und c die gerade Linie co, so theilt sie Bogen, Sehne und Winkel in 2 gleiche Theile; denn es ist co auf mn senkrecht (40.).

77. Eine Linie ab nach demselben Verhältniß theilen, nach welchem eine andere cd getheilt ist (Fig. 43.).

Man beschreibe mit dem Radius cd aus c und d die sich in a durchschneidenden Bögen, ziehe die Linien ac und ad, trage darauf in al und am von a abwärts ab auf, und verbinde die Punkte l und m miteinander, so ist lm = ab.

Dann ziehe man von a durch die Theilungspunkte der Linie cd in o, q, s die Linien ao, aq, ar, so wird durch dieselben auch lm = ab in n, p, r in demselben Verhältniß geschnitten; denn (28.) △ nap ∽ oaq, qas ∽ par u. s. w.

Zusatz. Einrichtung und Gebrauch einer geometrischen Scale.

78. Einen Winkel mißt man auf dem Papiere mit Hilfe des Transporteurs, indem man seinen Mittelpunkt an den Scheitel bringt, und die Grade zählt, welche zwischen beide Schenkel fallen.

79. Wenn drei Theile eines Dreieckes gegeben sind, worunter aber immer eine Seite seyn muß, das Dreieck daraus construiren.

a) Wenn nur die drei Seiten bc, ac, ab (Fig. 44.) gegeben sind, so nimmt man eine derselben, z. B. bc als Basis an, beschreibt von B und C mit den Radien ac und ab die sich in A durchschneidende Bögen, und zieht durch den Durchschneidungspunkt auf B und C die Linien AB, BC.

b) Sind zwei Winkel ABC und ACB nebst einer anliegenden Seite BC gegeben, so bilde man

in B und C die gegebenen Winkel, deren Schenkel sich in A durchschneiden, und das verlangte Dreieck geben.

c) Sind aber zwei Seiten BC, BA, und der eingeschlossene Winkel ABC gegeben, so bilde man auf BC den gegebenen Winkel, und ziehe den Endpunkt von BA mit dem von BC zusammen.

80. Die Höhe eines Dreieckes ABD (Fig. 45.) bestimmen.

Man theile eine Seite AB in 2 gleiche Theile in C, beschreibe mit dem Radius AC = CB einen Kreis, und ziehe an den Punkten A und E, wo er das Dreieck durchschneidet, die Linie AE, so ist sie die Höhe; denn der Peripheriewinkel AEB ist = 90°.

Zusatz. Mechanisch geschieht dieses durch den Transporteur oder den Winkelhaken, oder durch den blossen Handzirkel, indem man den einen Schenkel in A einsetzt, und mit dem andern an der gegebenen Linie einen Bogen mEn beschreibt, von welchem sie die Tangente ist.

81. Ein Dreieck in einige gleiche Theile theilen.

Man theile (Fig. 46.) die Basis des Dreieckes abc in so viele (z. B. 3) Theile, als verlangt worden, so sind die △ △ bad, dae, eac einander gleich, weil sie dieselbe Höhe, wie das ganze Dreieck, und gleiche Basen bd = de = ec haben.

82. Ein Parallelogramm so in 2 gleiche Theile theilen, daß die Theilungslinie fg (Fig. 47.) durch einen gegebenen Punkt o geht.

Man ziehe die Diagonale ad, theile sie in h zu gleichen Theilen, und ziehe durch h und o die Linie fg,

so theilt sie das Parallelogramm in 2 gleiche Theile; denn da

$$\triangle\ adb = acd.$$

Die Winkel ahf = ghd
hdg = haf,
die Seite ah = hd, so ist
△ ahf = ghd, folglich
adb — ahf = acd — ghd, oder
bdhf = acgh, also auch
bdhf + ghd = acgh + ahf, oder
bdgf = acgf.

83. Von einem Polygone ein Dreieck von gegebener Größe wegnehmen.

Es sey das Polygon abcde (Fig. 48.), dessen eine Seite cd gemessen ist. Man dividire durch $\frac{1}{2}$cd den wegzunehmenden Theil, so erhält man die Höhe des verlangten Dreieckes. Auf cd errichte man irgendwo die senkrechte Linie op = der gefundenen Höhe, ziehe durch o parallel zu cd die Linie fh, und von einem der Durchschneidungspunkte h die Linie hc, so ist hcd das verlangte Dreieck.

84. Von einem Polygone eine vierseitige Figur von gegebener Größe fhdc (Fig. 49.) wegnehmen.

Man theile das Polygon in 2 Hälften, betrachte die eine Hälfte als das Dreieck fdc, und ziehe es von dem Polygone ab (83.). Aus c ziehe man die Höhe des Dreieckes fcd = fo, und an ihrem Endpunkte f mit cd die parallele Linie fh, so ist durch sie die wegzunehmende Figur bestimmt.

b) Auf dem Felde.

85. Diese Operationen führen gewöhnlich den Namen der Feldmeßkunst oder Gaeodesie, und begreifen Alles in sich, wodurch wir Distanzen messen, und von Distrikten oder Grundstücken den geometrischen Grundriß aufnehmen und messen. Diese Operationen sind also a) Linien- und b) Winkelmessungen, aus deren Verbande sich immer ein Grundriß ergiebt.

86. Eine Linie auf dem Felde abstecken.

Diese Messung setzt nothwendig eine vorausgegangene Absteckung voraus. Diese geschieht dadurch, daß man bei einer geraden Linie, a) wenn von A nach B (Fig 50.) gesehen werden kann, in A eine Absteckstange (Fluchtstange) senkrecht errichtet, einige Schritte (bis a) hinter sie zurücktritt, und in C einen Gehülfen eine andere Absteckstange so lange richten läßt, bis dem Auge die Stangen A und C mit dem Objekte B in gerader Linie zu seyn scheinen. Eben so verfährt man in C, indem man auf c zurücktritt, und den Gehülfen eine dritte Stange in D befestigen läßt, bis C und B wieder zusammenfallen u. s. w.

b) Kann man aber von A nach B nicht sehen, so sucht man zwischen beiden einen Punkt C von dem aus man A und B sehen kann, stellt in C und E eine Stange so auf, daß von C gesehen die Stange E zwischen C und D in gerader Richtung erscheint. Nun visirt man auch von E über C nach A. Ist E, C auch mit A gerade, so ist die Linie bezeichnet. Ist dieses nicht, so muß man die Stangen E, C so lange verrücken, bis man C, E, B, und E, C, A gerade sieht, wenn man in C nach B, und in E nach A visirt.

Ist aber die abzusteckende Linie eine krumme, wie (Fig. 51.) ABCD . . ., so durchschneidet man sie mit einer geraden Linie $\alpha\beta$ so, daß diese die Wendungen der krummen Linie rechts und links durchschneidet, und steckt an den Durchschneidungspunkten a, b, c, d . . . Marke ein.

87. Eine Linie messen.

Diese Messung geschieht mit der Meßkette, oder auch mit Stangen, und es bleibt dabei erste Regel, daß jede Linie (an der Bergwand wie auf der Ebene) immer horizontal gemessen werden muß, weil man sie dann auch auf einer horizontalen Ebene verzeichnet.

b) Um krumme Linien (wie Fig. 51) zu messen, braucht man auch noch eine Meßruthe für die Messung der Abweichungen oder Ausbrüche der Wendungen der krummen Linie von der geraden. Hat man z. B. die gerade Linie $\alpha\beta$ durch die krumme abgesteckt, und von β nach n gemessen, so mißt man mit der Meßruthe von n einen Perpendikel nach m, wo die krumme Linie sich am meisten beugt, und heißt βn die Abscisse, und mn die ihr zukommende Ordinate, oder auch nur den Ausbruch. So mißt man ferner bis zum Durchschneidungspunkt o, und verfährt zwischen ohg, wie zwischen βmh u. s. w., notirt übrigens alle gemessenen Abscissen und Ordinaten in das Messungsmanuale, um sie nach demselben im verjüngten Maaßstabe auch aufs Papier auftragen zu können.

c) Wenn eine Linie an einer Bergwand ADm (Fig. 52.) gemessen werden soll, steckt man allererst die gerade Linie ABDCm ab, spannt dann ein Stück der Kette von A bis C, soviel sich von ihr nach ihrem Ge-

wichte noch füglich horizontal spannen läßt, stellt in B einen Stab senkrecht in der Richtung Am, und zählt die Fuße der Kette zwischen A und C. Dann setzt man die Kette in den Stab B ein, spannt sie horizontal bis E, setzt einen Stab bei D ein, mißt BE, fährt auf diese Weise an der Bergwand fort, bis man in m ankömmt, und summirt die Abtheilungen AC, BE, Dg für Nm.

Zusatz. Einrichtung und Gebrauch der Kette und der Stangen werden mündlich erklärt.

88. Einen Winkel messen kann man auf dem Felde entweder (technisch) mit dem Meßtisch, oder auch mit dem Scheibeninstrumente (astrolabium) nach Graden und ihren Theilen.

a) Will man einen Winkel bac (Fig. 53.), welchen zwei Objekte b und c in a mit einander machen, mit dem Meßtische messen, so zieht man einen mit dem Schwamm feucht gemachten Bogen auf das Tischblatt auf, und klebt denselben mit Mundleim an seinem Rande an, stellt den Tisch über a auf den Boden, richtet sein Blatt durch eine kleine Bleiwage horizontal, stellt den Tisch in dieser Stelle unbeweglich, läßt den Schenkel der Flugge in a einspielen, und sticht auf dem ausgespannten Bogen den Punkt A selbst an der Spitze der Flugge so ab, daß nun A genau senkrecht über a liegt, oder der Punkt A centrirt ist. Nun legt man das Visirlineal an den Punkt A, und drehet es, bis der Gegenstand B von seinen Dioptern oder auch von dem Fadenkreuze seines Fernrohres geschnitten wird, und zieht auf dem Tische mit einer Reißnadel oder scharfem Bleistift an der Schneide des Lineales oder der Regel die gerade Linie BA. Dann

richtet man die Regel nach C, und zieht CA, so ist der Winkel BAC = bac.

b) Ist auf dem Tische bereits eine Linie BA gezogen, und man soll diese Linie genau in die Verticalebene AaBc zweier Gegenstände a und b bringen, so stellt man den Tisch zuerst über a horizontal, bringt die Schneide der Regel genau an die gezogene Linie AB, und verschiebt nun das Tischblatt so lange, bis der Punkt A genau senkrecht über a steht, und dabei sich der Gegenstand B genau in den Dioptern oder dem Fadenkreuze zeiget, also die Linie AB nach dem Objekte B richtig eingerichtet ist. Will man nun den Winkel bac messen, so visirt man nach C, und zieht auf dem Tische AC, so ist BAC = bac.

c) Will man den Winkel mit dem Scheibeninstrumente messen, so bringt man seinen Mittelpunkt senkrecht über a, (centrirt das Instrument über seiner Station) und stellt die Scheibe noch vollends horizontal durch eine Bleiwage, oder eine gläserne Libelle. Dann stellt man den Inder der Alhidade oder des Nonius (Vernier) genau auf o, oder den Anfangspunkt der Eintheilung des Kreises (limbus), dreht die Scheibe so lange, bis der Gegenstand C sich in der Visirlinie der Diopteru oder des Fadenkreuzes befindet, und stellt nun den Kreis über dem Stative fest, dreht dann die Alhidade über dem Kreise so lange, bis der Gegenstand B von der Visirlinie geschnitten wird, und mißt nun den Winkel bac auf der Eintheilung des Kreises und des Nonius, oder auch, wenn die Theilung eine Transversale ist, nach den Transversalen nach Graden und Minuten ab, und notirt ihn in das Manuale.

* Einrichtung und Gebrauch dieser Instrumente wird mündlich in der Vorlesung erklärt.

89. Distanzen messen.

Wenn man den Abstand zweier oder mehrerer Gegenstände nicht unmittelbar mit der Meßkette oder Meßstangen messen kann, so bestimmt man ihn geometrisch, d. i. durch den Meßtisch, oder auch durch das Scheibeninstrument nach den Principien der Aehnlichkeit geometrischer Figuren (27.).

Bei diesen Operationen kömmt nun alles darauf an, die zu bestimmende Distanz AB (Fig 54.) als die Seite eines Dreieckes AcB anzusehen, dessen Spitze c gegen A und B so gewählt wird, daß das Dreieck selbst, so viel es möglich ist, gleichseitig wird, oder wenigstens keinen Winkel enthält, der unter 36 und über 120° mißt, weil sonst ein kleiner unvermeidlicher Fehler im Winkelmessen bedeutenden Einfluß auf die zu bestimmende Distanz hat.

a) Kann man daher zu den 2 Gegenständen A und B von C hinmessen, so mißt man CA und CB mit der Kette, und notirt sie im Manuale, stellt nun (nach 88.) den Meßtisch centrirt über c auf, und visirt nach A und B, und zeichnet den Winkel acb auf demselben, trägt dann die Maaße von AC und BC auf ac und bc auf, und zieht ab, welches mit AB parallel ist, folglich Ca : CA = ab : AB So viel verjüngte Fuße nun ab mißt, so viele wirkliche Fuße mißt daher auch AB.

b) Soll aus 2 Seiten AC und BC (Fig. 55.) und einem Winkel CAB, welcher einer der bekannten Seiten entgegensteht, die Seite (Distanz) AB gefunden werden, so mißt man die Seiten AC, BC und notirt

sie in das Manuale, stellt den Meßtisch centrirt über A; und visirt auf ihm aus A den Winkel BAC, trägt nach verjüngtem Maaße die Linie AC auf der gezogenen Linie von A nach c. Nun trägt man BC im verjüngten Maaße mit dem Zirkel von c nach b auf, so ist bc parallel mit BC, oder das Dreieck Acb ähnlich dem Dreiecke ACB, mithin Ab das verjüngte Maas der Distanz AB.

c) Sollen aus einer Seite AB und den anliegenden Winkeln A und B (Fig. 56.) die übrigen 2 Seiten AC und BC gefunden werden, so ist hier für AC der zu wählende Punkt B, und die Linie AB heißt nun Basis (Grundlinie). Man stellt daher den Meßtisch in A centrirt und horizontal auf, visirt aus A nach C und B, zieht die entsprechenden Linien, und trägt die gemessene Grundlinie im verjüngten Maaße auf, bringt nun den Tisch über B, richtet ihn auf die Grundlinie ein, und visirt nach C, so wird diese Linie die in A nach C gezogene aα in dem Punkte c schneiden, welcher nun das Bild des Mittelpunktes des Gegenstandes C selbst ist, und es ist nun, da CAB = αaB, und ABC = aBc ist, das Dreieck ACB ∽ △ acB, mithin

$$aB : AB = ac : AC = Bc : BC.$$

d) Eben so bestimmt man auch den Abstand D, E von A und B, und findet so auch die Abstände DC, CE, DE unter diesen Punkten selbst, so, daß also diese vielfache Distanzmessung auf einer einzigen Grundlinie eigentlich nur die Widerholung derselben Aufgabe ist. Man nennt dieses Verfahren das **Vorwärts abschneiden**.

Dabei ist aber zu beobachten, daß für die Bestimmung der Distanz DE die Standlinie AB, so viel möglich, parallel mit DE gewählt werden muß, und zugleich so, daß die Winkel DAB, ABE nicht viel über 120°, die Winkel ABD, EAB nicht viel unter 36° ausfallen. Auch ist zu bemerken, daß, wenn der Gegenstand E sehr hoch und D in der Tiefe liegt, die verjüngte Distanz dieser Gegenstände auf dem Meßtische nicht die schiefe Linie von einem zum andern, sondern immer den horizontalen Abstand beider Gegenstände mißt.

e) Sind die Punkte A, B, C, D durch Vorwärtsabschneiden auf dem Meßtische bestimmt worden, so kann man aus ihnen durch's Rückwärtsabschneiden andere E, F (Fig. 57.) auf ihm bestimmen.

Auf dem Felde finde sich nämlich ein Punkt F, in welchem die Gegenstände A, B, C, D sich in geraden in F sich durchschneidenden Linien zeigen, so stellt man den Meßtisch in F auf, legt die Schneide des Visirlineales auf die Bilder a, b der Gegenstände A, B, und zieht an derselben die gerade Linie baF, drehet den Meßtisch so lange, bis die Gegenstände A, B sich in dieser Lage des Visirlineales in gerader Linie zeigen, oder sich decken, und stellt ihn fest, so ist der Tisch gehörig eingerichtet. Legt man nun auch die Schneide des Visirlineales über die Bilder c, d der Gegenstände C, D und zieht durch sie eine gerade Linie, so schneidet diese die vorige baF in dem Punkte F, der nun das Bild von F selbst, und senkrecht über F ist. Eben so bestimmt man auch das Bild des Punktes E auf dem Tische aus den Gegenständen BD, AC rückwärts.

f) Sind die Bilder a, b, c der Gegenstände A, B, C (Fig. 58.) auf dem Meßtische bestimmt, so kann man durch sie die Lage einer jeden Stelle D finden, aus welcher man jene 3 Gegenstände sehen kann. Stellt man nämlich den Meßtisch über die gewählte Stelle D horizontal, legt auf denselben ein Blatt Papier K fest, und zeichnet auf demselben an der Schneide des Visirlineales αd, γd, βd von D nach A, C, D aus, nimmt man mit einem Dreispitze oder auch Stangencirkel das Dreieck acb auf dem Meßtische ab, und versetzt den Dreispitz in unverrückter Stellung auf die Linien αd, γd, βd so lange, bis seine 3 Spitzen auf diesen Linien genau einpassen, und sticht so die Punkte a, c, b, so ist ac parallel mit AC, cb parallel mit CB, mithin auch ad, cd, bd das verjüngte Maas von AD, CD, BD.

Wenn man keinen Dreispitz bei Handen hat, kann man das Dreieck abc auch mit einem gewöhnlichen Cirkel auf das Nebenblatt K auftragen. Man schneidet dann dasselbe aufs genaueste mit einer Scheere aus, und verschiebt es auf den Visirlinien des Nebenblattes so lange, bis seine correspondirende Spitzen diesen Linien genau zusagen.

90. Ein Grundstück aufnehmen.

Ein Grundstück ist immer ein gewisser Theil der Oberfläche unserer Erde, und daher entweder mit natürlichen Grenzen z. B. Flüssen, Bergrücken u. dgl. zum Theil oder ganz, oder sonst mit künstlichen Grenzen, z. B. Marksteinen, Zäunen u. s. w. eingeschlossen, welche seine Untermarken heissen. Bei Wassern und

Teichen

Teichen macht das Wasser oder der Damm selbst seine Grenze.

Die inner den Grenzen eingeschlossene Fläche nimmt der Feldmesser bei Abmessung des Stückes auf, indem er darauf anträgt, von derselben auf dem Papier ein Bild zu entwerfen, das als sein Grundriß jener Fläche möglichst ähnlich ist. Er berechnet nach demselben die Fläche des Grundstückes nach landesüblichen Morgen, Tagwerken, Jaucharten u. s. w., er theilt nach ihnen den Riß selbst in gegebene Theile, und definirt nach Umständen den Riß mit der Feder und Pinsel, so, daß man auch die Beschaffenheit der Ebene des Grundstückes, ob es eben oder bergicht, kennen, und als tragbares seine Hauptprodukte, die auf ihm wachsen, sehen mag. Er giebt ihm die Wasserfarbe, wenn seine Oberfläche ganz mit Wasser (z. B. ein See) auf immer bedeckt ist.

Um nun Grundstücke aufzunehmen, führt man verschiedene Operationen aus, die von der Beschaffenheit der Ebene der Grundstücke, von ihrer Zugänglichkeit, und ihrer Offenheit abhängen, nach welcher man sie ganz oder nur zum Theile an gewissen Stellen übersehen kann u. dgl., woraus sich die Methode der Aufnahme selbst ergiebt.

Da aber die Zuverlässigkeit der Aufnahme zunächst mit dem Complexe der Operationen selbst in Beziehung ist, so bleibt es immer nothwendig, die Operationen für die Aufnahme möglichst zu vereinfachen, indem man in dem Grundstücke vorläufig die größten Irregularitäten in der Form durch Schnitte oder Fluchtlinien abschneidet, und dasselbe auf die möglichst einfachste Form

zu reduciren, oder auf das einfachste Polygon zu bringen sucht, von welchem man sich vorläufig einen rohen Entwurf (Brouillon) macht.

Nach dieser Form und Beschaffenheit der Oberfläche des Stückes richtet sich nun die Methode seiner Aufnahme, und folglich auch der auszuführende und in dem Brouillon zu entwerfende Operationsplan.

Man mißt nämlich das auf seine einfachste Form abgesteckte Stück oder Polygon α) central, oder aus Einem Punkte, aus welchem es ganz übersehen werden, und in seinen Radien gemessen werden kann, indem man die Operation (89. a) so oft anwendet, als nothwendig ist. β) Man wendet die Diagonalmethode an, bei welcher man die Operationen 89. a) b) wechselweise anwendet. γ) Man bedient sich der Parallelmethode, wenn man das Polygon durch eine Diagonale ganz durchschneidet, und auf diese aus den Endpunkten des Polygones senkrechte Linien zieht und mißt. δ) Man nimmt das Polygon perimetral, oder aus seinem Umfange auf, wenn man durch dasselbe keine freie Aussicht, oder zu demselben keinen Zutritt hat, und deßwegen alle Umfangsseiten und Winkel des Polygones messen muß. Wenn der Grundriß keine besondere Genauigkeit erfordert, oder man eilen muß, so schneidet man auch nur die Endpunkte des Polygons nach 89. d) vorwärts ab, oder man schneidet auch dieselben aus einigen in dem Grundstück selbst bestimmten Punkten nach 89. e) rückwärts ab.

a) Soll z. B. das Grundstück ABCDE (Fig. 59.) central gemessen werden, so mache man sich von demselben einen beiläufigen Entwurf, messe von einem ungefähr in der Mitte liegenden Punkte F die Abstände der

mit Stäben vorläufig bezeichneten Winkel in den Linien AF, BF, CF u. s. w., die man in das Manuale einträgt, bringe dann den Meßtisch centrirt und horizontal auf F, visirt auf die Punkte A, B, C, D, E, und zieht die Linien Fa, Fb, Fc, trage auf sie das verjüngte Maas der entsprechenden Abstände auf, schliesse die Endpunkte durch die Linien bc, cd u. s. w., so ist abcde ∽ ABCDE.

b) Soll das Grundstück ABCDE (Fig. 60.) von 2 Punkten A und B, aus welchen es ganz übersehen werden kann, gemessen werden, so messe man allererst die Distanz dieser 2 Punkte, errichte in allen Winkeln des Stückes C, D, E u. s. w. senkrechte Stäbe, und visire von A auf dieselbe hin, wodurch die Linien Ab, Ae, Ad, Ac entstehen. Dann bringe man den Meßtisch von A nach B, trage im verjüngten Maase AB auf Ab, stelle den Meßtisch so, daß b auf B fällt, und visire von B zuerst nach A, um die gerade Linie BabA zu erhalten, und dann nach den übrigen Stäben, wodurch die Linien Bc, Bd, Be entstehen, welche die vorigen in c, d, e durchschneiden. Werden endlich diese Durchschneidungspunkte durch ac, cd, dc, eB mit einander verbunden, so ist acde ∽ ACDEB.

Zusatz. Man sieht leicht, daß dieselbe Operation angewendet werden muß, wenn man die Basis inner dem Grundstücke CDEFGHI gewählt hat.

c) Perimetral wird ein Grundstück gemessen, wenn es nur vollkommen umgangen werden kann, wie z. B. eine Waldung u. dgl.

Ist diese Fläche ABCDE (Fig. 61.), so bringe man den Meßtisch an einen der vorher ausgesteckten Winkel A, und visire nach E und B, wodurch auf dem Meßtische die Linien Ae und Ab entstehen. Dann mißt man AB, und trägt sie im verjüngten Maaße auf Ab. Von A bringt man den Tisch auf B, stellt ihn so, daß die Linie Ba genau auf AB fällt, und visirt nach C, wodurch die Linie Bc entsteht. Von B kömmt der Meßtisch nach C, so, daß Cb genau auf den gleichfalls gemessenen und im verjüngten Maaßstabe aufgetragenen Abstand CB fällt, und visirt nach D, wodurch Cd entsteht, und endlich, wenn der Meßtisch nach D gekommen, die Linie Dc auf die gemessene und aufgetragene DC gerichtet und nach E visirt worden ist, wird die gezogene Linie De die Linie ae in e schneiden, und so den Plan vollenden.

d) Uebrigens werden die von dem Grundstücke abgeschnittenen Irregularitäten und Krümmungen als eigene Stücke besonders gemessen, und an das Polygon angereihet.

Ist z. B. (Fig. 62.) ein Teich, so steckt man um denselben das einfachste Polygon ABCDEF ab, mißt alle seine Umfangsseiten und Winkel nach 89. a), und nimmt gleichzeitig aus den Schnitten AB, BC u. s. w. die krummlinichte Grenze des Teiches durch Absciſsen und Ordinaten auf nach 86. b). Wo man mit diesen nicht mehr zureicht, wie bei der Erdzunge bei E, schneidet man diese durch eine Linie (Strahl) Eg durch den Winkel GEF, welche man durch den Meßtisch nach 89. b) mißt, aus welchen man die Zunge selbst durch Seitenstrahlen Eh, Em u. s. w. und durch Absciſsen und Ordinaten mißt. Wo der Schnitt AF über den

Vorsprung bei a und b geht, steckt man das Dreieck acb ab, bestimmt ab mit dem Meßtische durch vorwärts Abschneiden auch ac nach 89. c) u. s. w. Um das Polygon sicherer zum Schlusse zu bringen, verlängert man die Diagonalen AD über den Teich in der Richtung nach α und β, und eben so auch Fδ und Bγ, zeichnet auf dem Tische die Richtungslinie $\alpha\beta$ durchaus, und nimmt von dieser den Teich von A über F und E bis D, und dann von A über B, C nach D auf, damit die Folgen der unvermeidlichen Fehler sich in zwei Theile zerschlagen.

Wenn man mit dem Scheibeninstrumente operirt, werden die gemessenen Winkel mit der Chordenscale aufgetragen, weil der gewöhnliche Transporteur nicht genau genug ist, oder man berechnet auch ungemessene Diagonalen aus gemessenen Linien und Winkeln trigonometrisch.

91. Ein aufgenommenes Grundstück berechnen.

Um ein aufgenommenes Grundstück zu berechnen, theilt man den Plan desselben entweder wie Fig. 63. in lauter Trapeze MABL, LBCK u. s. w., und berechnet den Inhalt derselben aus der Diagonale in die halbe Summe der den entstandenen Dreiecken entsprechenden Höhen, oder man theilt, wie Fig. 64., in Dreiecke afb, cfd, dfe ab, und berechnet den Inhalt derselben aus der Basis in die halbe Höhe. Die Summe aller dieser Trapeze oder Dreiecke giebt den ganzen Inhalt des Grundstückes.

92. Ein Grundstück theilen.

a) Soll ein Grundstück in mehrere Theile abgetheilt werden, so wird dasselbe zuerst (nach 90.) aufgenommen, und nun in Trapezien und Dreiecke für seine Flächenrechnung zerlegt, deren Richtung mit der Beschaffenheit der Oberfläche des Stückes, oder seiner ebenen oder geneigten Lage und mit der Gelegenheit für die Aus- und Einfahrt in die Theile in nächster Beziehung ist.

In dieser Hinsicht muß die triangular Eintheilung möglichst vermieden werden, weil diese Form für den Pflug und selbst für die Sense nicht geeignet ist. Man wählt deßwegen lieber die Trapezoide oder überhaupt die viereckigte Form für die Theile, und zeichnet die Theilungslinien immer so, daß Gräben, welche das Stück durchschneiden, oder für den Abzug des Wassers erst angelegt werden müssen, nicht nach ihrer Länge ein Stück durchschneiden, sorget für schickliche Ausfahrt aus jedem Theile, ohne auf den angrenzenden eine Servitut zu bringen.

Bei Abtheilung eines Nadelholzes müssen die Theile eine Richtung haben, bei welcher der förstliche Betrieb desselben möglich bleibt, und die Schläge durch die herrschende Winde wieder gehörig überworfen werden mögen.

b) Unter diesen Rücksichten sey nun was immer für eine Figur in gleiche Theile zu theilen. Ist zuvor (91.) der Flächeninhalt bekannt, so dividire man ihn mit der Anzahl der Theile, welche gefordert werden. Eine Seite der ganzen Figur, welche man für die bequemste hält, nehme man als Basis an, und von ihr aus den ersten der verlangten Theile weg (84.).

Von der Linie, welche die Endgrenze des ersten Theiles bestimmt, suche man den zweiten Theil u. s. w. bis das Ganze in die verlangten Theile getheilt ist.

c) Soll in ungleiche Theile getheilt werden, so, daß z. B. ein Theil $= \frac{}{5}$, ein anderer $= \frac{2}{15}$ u. s. w. der ganzen Fläche seyn soll, so muß zuerst die Größe der einzelnen Theile nach der Proportionslehre gesucht, und dann jeder einzelne bestimmt werden, wie dieß z. B. bei der verschiedenen Tragbarkeit der Theile der Fall ist.

Soll z. B. das Feld ABcD . . . (Fig 63) in 5 gleiche Theile getheilt werden, so berechnet man zuerst nach seinen Trapezien MABL, LBCK u. s. w. seinen Inhalt, und dividirt ihn durch 5, so findet man in dem Quotienten die Größe eines Theiles. Giebt nun das Stück MABL so einen Theil beinahe, und ist es nur um einige (m) □ Fuße zu klein, so setzt man noch das Dreieck LBo zu demselben, so, daß $\beta o \cdot \alpha L = m$, oder $L\alpha = \frac{m}{\beta o}$ Fuße genommen wird u. s. w. Am Ende pflockt man die Theilungslinien ao und δ für immer aus.

Zusatz. Praktische Einübung dieser Auflösungen theils auf dem Papiere, theils auf dem Felde.

Trigonometrie.

93. Die Trigonometrie ist die Wissenschaft, aus 3 gegebenen Theilen eines Dreieckes die übrigen zu finden.

Zusatz. Da jedes Dreieck, in welchem nur alle 3 Winkel gegeben sind, immer unbestimmt ist, so muß unter den gegebenen Stücken wenigstens Eine Seite seyn.

94. Wenn man durch die Schenkel eines Winkels (Fig. 65.) ACB einen Kreis, und von dem Durchschneidungspunkte (Endpunkte) B eine senkrechte Linie BE auf den Durchmesser anderen Schenkel zieht, so ist BE der Sinus, EA der Quersinus (sinus versus) der Radius AC = BC der Sinus totus. Errichtet man am Ende des Durchmessers in A eine auf ihn senkrechte Linie AF so heißt sie die Tangente, verlängert man den zweiten Schenkel BC, bis er die Tangente in F durchschneidet, so heißt er die Secante des Winkels ACB oder des Bogens AB.

Zusatz 1. Der Sinus eines Winkels oder Bogens von 90° ist = dem Radius = r; denn wenn ACG oder AG = 90°, so ist CG auf AC senkrecht, folglich der Sinus von ACG oder AG, also ꝛc. ꝛc.

Zusatz 2. BE ist nicht nur Sinus für ACB, sondern (ex defin.) auch für BCD, also für den Nebenwinkel von ACB, folglich haben Nebenwinkel gleiche Sinus.

Zusatz 3. Die halbe Sehne des Bogens BAK ist = Sinus des $\frac{1}{2}$ Bogens AB, also ist $\frac{1}{2}$ Sehne BK = Sin $\frac{1}{2}$ BAK = Sin. $\frac{1}{2}$ BCK.

Zusatz 4. Der Sinus totus ist also der größte Sinus, und wenn er = 1 angenommen wird, jeder andere Sinus ein ächter Bruch.

95. Der Winkel BCG heißt das Complement (Ergänzungswinkel) für ACB, mit welchem er 90° macht. Die trigonometrischen Linien eines Ergänzungswinkels heißen für den ergänzten Cosinus, Cotangente, Cosecante.

Zusatz 1. Es wird daher von ACB

$$\text{Sin} = \sqrt{r^2 - \text{Cos.}^2}, \text{ weil (geomet.)}$$

$$BE = \sqrt{CB^2 - EC^2}.$$

Zusatz 2. $\text{Cos.} = \sqrt{r^2 - \text{Sin.}^2}$, weil (geom.)

$$EC = \sqrt{BC^2 - BE^2}.$$

Zusatz 3. $\text{Tang.} = \frac{r\,.\,\text{Sin.}}{\text{Cos.}}$, weil (geomet.)

$$EC : BE = AC : AF$$

$$AF = \frac{BE\,.\,AC}{EC}.$$

Zusatz 4. $\text{Sec.} = \frac{r^2}{\cos}$, weil (geom.)

$$EC : CA = CB : CF$$

$$CF = \frac{CA \, . \, CB}{EC} = \frac{CA^2}{EC}.$$

Zusatz 5. $\text{Cot.} = \frac{r \, . \, \text{Cos.}}{\text{Sin.}}$, weil

$$CH : CG = BH : IG$$

$$IG = \frac{CG \, . \, BH}{CH} = \frac{CG \, . \, BH}{BE}.$$

Zusatz 6. $\text{Cosec.} = \frac{r^2}{\text{Sin.}}$, weil

$$CH : CG = CB : CI$$

$$CI = \frac{CG \, . \, CB}{CH} = \frac{CB^2}{BE}.$$

96. Gleichnamige trigonometrische Linien gleicher Winkel verhalten sich zu einander, wie die Radien, welche man zu ihren Sinus totus annimmt; denn wenn von einem Winkel die geometr. Linien durch die großen, von dem andern durch die kleinen Buchstaben bezeichnet werden, so sind (Fig. 60. a. b.) in den ähnlichen Dreiecken

die Sinus $BE : be = BC : bc$,

die Cosinus $EC : ec = CA : ca = BC : bc$,

die Tangenten $AI : ai = CA : ca = BC : bc$,

die Secanten $CI : ci = CA : ca = BC : bc$,

die Cotangenten $FG : fg = CG : cg = BC : bc$,

die Cosecanten $CF : cf = Cg : cg = BC : bc$.

Zusatz 1. Also haben auch gleichnamige trigonometrische Linien gleicher Winkel unter sich einerlei Verhältniß.

Zusatz 2. Da jede Seite eines Dreieckes theils als geometr. Seite, theils als trigonometrische Linie (als Sinus, Cosinus u. s. w.) betrachtet werden kann, so wird z. B. (Fig 65.)

BE : CE = Sin. BCA : Cos. BCA,

IA : IC = Tang. BCA : Secante BCA u. s. w.

97. In jedem Dreiecke verhalten sich die Winkel, wie die ihnen entgegengesetzten Seiten; denn es sey (Fig. 66.) das Dreieck ACB, und um dasselbe ein Kreis beschrieben, von dessen Mittelpunkte S die senkrechten Radien Sf, Sg, Sh gezogen sind, so ist (geom.)

$An = \frac{1}{2} AB$,

$Bm = \frac{1}{2} BC$,

$Ar = \frac{1}{2} AC$, und die unterspannten Bögen sind in 2 gleiche Theile getheilt.

Es ist aber An = Sin. ACB (94.), dessen Maaß

$= \frac{1}{2} afb = af$ ist (geom.)

Bm = Sin. BAC, und

Ar = Sin. ABC.

Also sind in jedem Dreiecke die Hälften der Seiten die Sinus der entgegengesetzten Winkel, folglich (96. Z. 2.)

$\frac{1}{2} AB : \frac{1}{2} BC =$ Sin. ACB : Sin. BAC, oder

AB : BC = Sin. ACB : Sin. BAC.

Dasselbe gilt offenbar auch von den übrigen Seiten und Winkeln, also allgemein rc. rc.

Zusatz. Daher ist auch

AB : Sin. ACB = BC : Sin. BAC.

98. In dem stumpfwinklichten Dreiecke ACB (Fig. 67.) verhält sich die dem stumpfen Winkel entgegengesetzte Seite zum Sinus des spitzen Nebenwinkels,

wie die dem stumpfen Winkel anliegende zum Sinus des ihr entgegengesetzten Winkels; denn

zieht man auf die verlängerte Seite AB die senkrechte Linie CD, so ist im Dreiecke CDB (97.)

Sin. tot. : CB = Sin. CBD : CD. Dann ist im Dreiecke CAD

CA : Sin. tot = CD : Sin. CAD, also

CA : CB = Sin. CBD : Sin. CAD, oder

CB : Sin. CAD = CA : Sin. CBD.

99. Wenn in was immer für einem Dreiecke ABC (Fig. 67.) auf die größte Seite aus dem ihr entgegengesetzten Winkel eine senkrechte Linie gezogen wird, so verhält sich die größte Seite zu der Summe der beiden übrigen, wie die Differenz derselben zu der Differenz der durch die senkrechte Linie an der größten Seite abgeschnittenen Theile; denn

wenn aus B mit der kleinsten Seite als Radius angenommen ein Kreis beschrieben wird, so wird als Radius

RB = AB = BE, folglich

RB + BC = AB + BC = Summe der zwei Seiten,

BC — BE = BC — AB = Differenz — — —, und

GC — AG = GC — FC = Differenz der abgeschnittenen Theile.

Es ist aber (geomet.)

AC : CR = EC : FC, oder

AC : RB + BC = BC — BE : GC — AG, folglich

AC : AB + BC = BC — AB : GC — AG.

100. In jedem Dreiecke ABD (Fig. 68.) verhält sich die Summe zweier Seiten zu ihrer Differenz wie

die Tangente der $\frac{1}{2}$ Summe der entgegengesetzten Winkel zu der Tangente der $\frac{1}{2}$ Differenz derselben; denn beschreibt man mit der kleinern der 2 Seiten AB aus A einen Kreis, und verlängert die zweite AD, bis sie den Kreis durchschneidet, zieht dann durch M und G die Linie MG, welcher in G die mit der Sehne BR parallele DG begegnet, so ist der Winkel MBR $= 90°$, weil er auf dem Durchmesser MR steht, also auch MGD $= 90°$, weil DG parallel mit RB ist. Daher wird $AB + AD = AD + AM = DM =$ Summe der zwei Seiten $AD - AB = AD - AR = RD =$ Differenz der zwei Seiten, der äußere Winkel
$MAB = ABD + ADB = ABR + ARB$, also
$\frac{1}{2} MAB = ARB$, weil $AR = AB$, also
$\frac{1}{2}$ Summe der Winkel $ABD + ADB$.
Da aber $ARB = MDG$, so ist auch
$MDG = \frac{1}{2}$ Summe von $ABD + ADB$.

Wenn von der $\frac{1}{2}$ Summe der Winkel ABD, ADB $=$ MDG der Winkel BDG abgezogen wird, so bleibt ADB. Daher ist $BDG = \frac{1}{2}$ Differenz ABD und ADB;

denn $ARB = \frac{ADB}{2} + \frac{ABD}{2}$,

$$ADG = \frac{ADB}{2} + \frac{ABD}{2},$$

$$ADB + BDG = \frac{ADB}{2} + \frac{ABD}{2},$$

$$BDG = \frac{ADB}{2} + \frac{ABD}{2} - ADB$$

$$= \frac{ABD}{2} + \frac{ADB}{2} = \tfrac{1}{2} \text{ Differenz.}$$

Ist daher DG der Radius, so ist MG die Tangente des Winkels MDG, und BG die Tangente von BDG. Es ist aber, weil BR parallel zu DG ist,

MR : RD = MB : BG (geom.), also

MR + RD : RD = MB + BG : BG, folglich

MD : RD = MG : BG.

101. Aus den bisher bewiesenen Sätzen ergeben sich für die Auflösung der Dreiecke die Proportionen, welche in den folgenden Tabellen enthalten sind, und zwar

I. im rechtwinklichten Dreiecke ABC (Fig. 69.), in welchem A den immer gegebenen rechten Winkel, B und C aber die beiden spitzen Winkel bedeuten.

Es sey im rechtwinklichten Dreiecke ABC (Fig. 69.)

gegeben	gesucht	Proportionen und Gleichungen.
AB, AC	BC	$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2}$, oder AB : AC = R : Tang. B, dann Sin. B : R = AC : BC
	B	AB : AC = R : Tang. B
	C	AC : AB = R : Tang. C
AB, BC	AC	$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}$
	B	BC : AB = R : Cos. B
	C	BC : AB = R : Sin. C

gegeben	gesucht	Proportionen und Gleichungen.
AC, BC	AB	$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2}$
	B	BC : AC = R : Sin. B
	C	BC : AC = R : Cos. C
AB, B	AC	R : Tang. B = AB : AC
	BC	Cos. B : R = AB : BC
AB, C	AC	R : Cot. B = AB : AC
	BC	Sin. C : R = AC : BC
AC, B	AB	R : Cot. B = AC : AB
	BC	Sin. B : R = AC : BC
AC, C	AB	R : Tang. C = AC : AB
	BC	Cos. C : R = AC : BC
BC, B	AB	R : Cos. B = BC : AB
	AC	R : Sin. B = BC : AC
BC, C	AB	R : Sin. C = BC : AB
	AC	R : Cos. C = BC : AC.

II. Im schiefwinklichten Dreiecke ABC (Fig. 70.) sey

gegeben	gesucht	Proportionen und Gleichungen.
AC, A, B	AB	Sin B : AC = Sin. C : AB
AC, A, B	BC	Sin. B : AC = Sin. A : BC
AC, BC A	B	BC : Sin. A = AC : Sin. B.
AC, BC A	AB	Wenn B gefunden ist, AB nach der ersten Formel.
AB, AC A	B C	$AB + AC : AC - AB =$ $\text{Tang.} \frac{B + C}{2} : \text{Tang.} \frac{B - c}{2}$. * Die ½ Summe + ½ Differenz der Winkel B und C giebt den größern B; ½ Summe — ½ Differenz den kleinern C.
AB, AC A	BC	Wenn B und C gefunden sind, BC nach der zweiten Formel.
AB, BC B	AC	Man suche nach der vorigen Formel die Winkel A und C, und nach der ersten die 3te Seite.

AB,

gegeben	gesucht	Proportionen.
AB, BC AC	A, B, C	$AC : AB + BC = BC - AB : GC - AG$ (Fig. 66.) Weil $AC =$ Summe der Theile $AG + GC$ $FC =$ Differenz — — — so ist $GC = \frac{AC + FC}{2}$ und $AG = \frac{AC - FC}{2}$. Daher können in dem rechtwinklichten Dreiecke BAG, wenn AB und AG gegeben sind, oder im rechtwinklichten Dreiecke BGC, wo BC und GC bekannt sind, die Winkel nach I gefunden werden.

Anwendung.

102. Den Abstand zweier Punkte E und D messen,

a) wenn man zu ihnen nur von einem dritten Punkte B (Fig. 71.) kommen kann.

Man messe mit dem Astrolab den Winkel EBD, und mit der Kette die Seiten BE und BD, so ist

$$BE + BD : BD - BE = \text{Tang.} \frac{E + D}{2} : \text{Tang.} \frac{E - D}{2},$$

folglich

$$\text{Tang.} \frac{E - D}{2} = \frac{BD - BE}{BE + BD} \cdot \text{Tang} \frac{E + D}{2}.$$

Da hieraus E — D gefunden wird, und
$E + D = 180° - EBD$ bekannt ist, so wird

$$E = \frac{E + D}{2} + \frac{E - D}{2}, \text{ und}$$

$$D = \frac{E + D}{2} - \frac{E - D}{2}.$$ Daher wird nun

Sin. E : DB = Sin. B : ED, folglich

$$ED = \frac{DB \cdot \text{Sin. } B}{\text{Sin. } E}.$$

Wäre z. B. die Seite EB = 120, BD = 233, und der Winkel DBE = 55°, so ist die Summe der zwei übrigen Winkel = 180 — 55 = 125, folglich die halbe Summe $= \frac{125}{2} = 62° 30'$; folglich

$$233 + 120 : 233 - 120 = \text{Tang. } 62° 30' : \text{Tang. } \frac{E - D}{2}$$

$$353 : 113 = \text{Tang. } 62° 30' : \text{Tang. } \frac{E - D}{2}$$

$$\text{Log. Tang. } \frac{E-D}{2} = \text{Log. } 113 + \text{Log. Tang. } 62°30' - \text{Log. } 353.$$

$$\text{Log. } 113 = 2,05308$$

$$+ \text{Log. Tang. } 62° 30' = \frac{10,28352}{12,33660}$$

$$- \text{Log. } 353 = \frac{2,54777}{9,78883} = \text{Log. Tang. } 31° 35'.$$

Folglich wird $DEB = 62° 30' + 31° 35' = 94° 5'$.
$EDB = 62° 30' - 31° 35' = 30° 55'$.

Nun aber ist

Sin. E : DB = Sin. B : DE

Log. DE = Log. DB + Log. Sin. B — Log. Sin. E:
= Log. 233 + Log. Sin. 55° — Log. Sin. 94° 5′

$$\text{Log. DE} = \text{Log. } 233 = 2{,}36736$$

$$+ \text{ Log. Sin. } 55^\circ = \underline{9{,}91336}$$

$$12{,}28072$$

$$- \text{ Log. Sin. } 94^\circ\, 5' = \underline{9{,}99890}$$

$$\text{Log. DE} = 2{,}28182\text{, folglich}$$

DE = 191,3 . . . . F.

b) Wenn man nur zu Einem Punkte E kommen kann.

Man messe den Winkel EBD aus B, und DEB aus E, und die Seite EB. Hieraus ergiebt sich der Winkel EDB = 180 — (EBD + DEB). Daher wird Sin. D : EB = Sin. B : ED, folglich

$$ED = \frac{EB \,.\, \text{Sin } B}{\text{Sin. } D}.$$

c) Es sey EBD = 55°, BED = 48, EB = 135 F; so ist

D = 180 — (55 + 48) = 180 — 103 = 77°, und
Sin. D : EB = Sin. B : ED
Sin. 70 : 135 = Sin. 55 : ED, folglich
Log. ED = Log. 135 + Log. Sin. 55° — Log. Sin. 70°

$$\text{Log. } 135 = 2{,}13033$$

$$+ \text{ Log. Sin. } 55^\circ = \underline{9{,}91336}$$

$$12{,}04369$$

$$- \text{ Log. Sin. } 70 = \underline{9{,}97299}$$

$$\text{Log. ED} = 2{,}07070\text{, folglich}$$

$$ED = 117{,}7.$$

103. Den Abstand der 2 Punkte K und G (Fig. 72.) messen, wenn man zu keinem derselben kommen kann.

Man wähle 2 Stationen A und B, aus welchen man K und G sehen kann, messe ihre Entfernung mit der Kette, und mit dem Astrolab von A die Winkel KAG und GAB, dann aus B die Winkel ABK und KBG, so wird im △ AGB

$$\text{Sin G} : AB = \text{Sin. B} : AG, \text{ also}$$

$$AG = \frac{\text{Sin. B} \,.\, AB}{\text{Sin. G}}.$$

Im △ AKB ist

$$\text{Sin. K} : AB = \text{Sin. B} : AK, \text{ also}$$

$$AK = \frac{\text{Sin. B} \,.\, AB}{\text{Sin. K}}.$$

Im △ AKG ist

$$AK + AG : AG - AK = \text{Tang.} \frac{K+G}{2} : \text{Tang.} \frac{K-G}{2}, \text{ also}$$

$$\text{Tang.} \frac{K-G}{2} = \frac{\text{Tang.} \frac{K+G}{2} \,.\, (AG - AK)}{AK + AG}.$$

Da hieraus K — G gefunden, und K + G bekannt ist, so ist K und G selbst bekannt, daher

$$\text{Sin. G} : AK = \text{Sin. A} : KG, \text{ also}$$

$$KG = AK \,.\, \frac{\text{Sin. A}}{\text{Sin. G}}.$$

Wenn AB = 112 F, KAG = 78°, GAB = 42°, ABK = 68°, GBK = 55°, so ist

$$ABG = ABK + GBK$$
$$= 68 + 55$$
$$= 123^\circ$$
$$AGB = 180 - (123 + 42)$$
$$= 180 - 165 = 15^\circ.$$

$$\text{Log. AG} = \text{Log. Sin. ABG} + \text{Log. AB} - \text{Log. Sin. AGB}$$
$$= \text{Log. Sin. } 123^\circ + \text{Log. } 112 - \text{Log. Sin. } 15^\circ$$

$$\begin{array}{rl} \text{Log. Sin. } 123^\circ = & 9{,}92359 \\ + \text{Log. } 112 = & 2{,}04922 \\ \hline & 11{,}97281 \\ - \text{Log. Sin. } 15^\circ = & 9{,}41300 \\ \hline \text{Log. AG} = & 2{,}55981, \text{ folglich} \\ \text{AG} = & 362{,}9 \text{ F.} \end{array}$$

Eben so ist

$$\text{Log. AK} = \text{Log. Sin. ABK} + \text{Log. AB} - \text{Log. Sin. AKB}$$
$$= \text{Log. Sin. } 68^\circ + \text{Log. } 112 - \text{Log. Sin. } 60^\circ$$

$$\begin{array}{rl} \text{Log. Sin. } 68^\circ = & 9{,}96717 \\ + \text{Log. } 112 = & 2{,}04922 \\ \hline & 12{,}01639 \\ - \text{Log. Sin. AKB} = & 9{,}93753 \\ \hline \text{Log. AK} = & 2{,}07886, \text{ folglich} \end{array}$$

AK = 119,9. Weiter ist im $\triangle$ AKG

$$K + G = 180 - KAG$$
$$= 180 - 78 = 102$$
$$\frac{K + G}{2} = \frac{102}{2} = 51^\circ$$

$$AK + AG : AG - AK = \text{Tang.} \frac{K + G}{2} : \text{Tang.} \frac{K - G}{2}$$

$$119{,}9 + 362{,}9 : 362{,}9 - 119{,}9 = \text{Tang. } 51^\circ : \text{Tang.} \frac{K - G}{2}$$

$$482{,}8 : 243 = \text{Tang. } 51^\circ : \text{Tang.} \frac{K - G}{2}$$

$$\text{Log. Tang.} \frac{K - G}{2} = \text{Log. } 243 + \text{Log. Tang. } 51^\circ - \text{Log. } 4$$

$$\begin{array}{rl} \text{Log. } 243 = & 2{,}38561 \\ + \text{Log. Tang. } 51^\circ = & 10{,}09163 \\ \hline & 12{,}47624 \\ - \text{Log. } 482{,}8 = & 2{,}68377 \\ \hline & 9{,}79267. \end{array}$$

$$\frac{K + G}{2} = 31^\circ 49', \text{ folglich}$$

$$K = 51^\circ + 31^\circ 49' = 82^\circ 49',$$

$$G = 51^\circ - 31^\circ 49' = 19^\circ 11', \text{ folglich}$$

$$KG : \text{Sin. } A = AK : \text{Sin. } G.$$

$$\text{Log. } KG = \text{Log. Sin. } A + \text{Log. } AK - \text{Log. Sin. } G.$$

$$= \text{Log. Sin. } 78^\circ + \text{Log } 119{,}9 - \text{Log. Sin. } 19^\circ, 11'.$$

$$\text{Log. Sin. } 78^\circ = 9{,}99040$$

$$+ \text{Log. } 119{,}9 = \underline{2{,}07882}$$

$$12{,}06922$$

$$- \text{Log. Sin. } 19^\circ, 11' = \underline{9{,}51666}$$

$$\text{Log. } KG = 2{,}55256, \text{ also}$$

$$KG = 353{,}9 \text{ F.}$$

104. Die Höhe eines Punktes messen,

a) wenn man zu der senkrechten von ihm gezogenen Linie AD (Fig. 73.) gehen kann.

Man stelle das Astrolab vollkommen horizontal in H, so, daß das Senkblei HC am Gradbogen genau auf o steht, die Diopter also auf HR gerichtet ist. Dann erhebe man die Diopter, bis sie den Punkt A, dessen Höhe gemessen werden soll, zeigt, so wird das Senkblei die Größe des Winkels AHR geben. Hat man nun auch die horizontale Entfernung des Instrumentes RH gemessen, so wird, ARH = 90°

$$R : \text{Tang. } AHR = HR : AR, \text{ also}$$

$$AR = \frac{\text{Tang. } AHR \,.\, HR}{R}, \text{ also die}$$

$$\text{Höhe } AD = AR + RD = \frac{\text{Tang. } AHR \,.\, HR}{R} + RD.$$

Wenn $RH = DC = 120$ F, und $AHR = 36°$, so ist

Sin. tot : Tang. AHR = HR : AR

Log. Sin. 90° : Log. Tang. 36° = Log. 120 : Log. AR

Log. AR = Log. Tang. 36° + Log. 120 — Log. Sin. 90°

$$
\begin{array}{rl}
\text{Log. Tang. } 36° = & 9,86126 \\
+ \text{ Log. } 120 = & \underline{2,07918} \\
 & 11,94044 \\
- \text{ Log. Sin. } 90° = & \underline{10,00000} \\
\text{Log. AK} = & 1,94044,
\end{array}
$$

folglich

$AR = 87,18$ F, und wenn $RC = 4$, $AD = 91,18$ F.

b) Wenn man aber zu der senkrechten Linie nicht kommen kann, so

wähle man in einer Entfernung von M (Fig. 74.) eine Standlinie dr, stelle das Instrument vollkommen horizontal, und messe von R aus den Winkel NRA, von D den Winkel NDA, und mit der Kette die Linie $dr = DR$. Dadurch wird auch der Winkel DAR gefunden, weil $ADR = 180° - ADN$, folglich im Dreiecke ADR neben der Seite $DR = dr$ auch die 3 Winkel bekannt sind, und, weil

Sin. DAR : DR = Sin. ARD : AD, so ist

$$AD = DR \cdot \frac{\text{Sin. ARD}}{\text{Sin. DAR}}.$$

Daher wird in dem rechtwinklichten Dreiecke AND; in welchem $AND = 90°$, ADN gemessen, und AD gefunden ist

R : Sin. ADN = AD : AN, also

$$AN = \frac{AD}{R} \cdot \text{Sin. ADN}, \text{ folglich}$$

$$AM = AN + NM = \frac{AD}{R} \cdot \text{Sin. ADN} + NM.$$

Wenn dr = DR = 45 F. ARD = 32°, ADN = 48°, so ist
ADR = 132°, DAR = 16°, folglich
Sin. DAR : DR = Sin. ARD : AD
Log. Sin. 16° : Log. 45 = Log Sin. 32° : Log. AD;

$$\begin{aligned} \text{Log. Sin. } 32^\circ &= 9{,}72421 \\ + \text{Log. } 45 &= \underline{1{,}65321} \\ & \ 11{,}37742 \\ - \text{Log. Sin. } 16 &= \underline{9{,}44034} \\ \text{Log. AD} &= 1{,}93708, \end{aligned}$$

folglich

AD = 86,51 F.

Weiter ist

AD : Sin. N = AN : Sin. ADN,
Log 86,51 : Log. Sin. 90 = Log. AN : Log. Sin. 48°
Log. AN = Log. 86,51 + Log. Sin 48° — Log. Sin. 90°.

$$\begin{aligned} \text{Log. Sin. } 48^\circ &= 9{,}87107 \\ + \text{Log. } 86{,}51 &= \underline{1{,}93708} \\ & \ 11{,}80815 \\ - \text{Log. Sin. } 90^\circ &= \underline{10{,}00000} \\ \text{Log. AN} &= 1{,}80815, \end{aligned}$$

folglich

AN = 64,29, und wenn Rr = Dd = N = 4,
A = 68,29 F.

105. Bei trigonometrischen Messungen dienen vorzüglich die aus dem Sinus totus berechneten trigonometrischen Tafeln, von deren Einrichtung und Gebrauch mündlich.

Zusatz 1. Der Bequemlichkeit wegen bedient man sich bei trigonometrischen Berechnungen der Logarithmen, und es ändern sich daher alle gegebenen Formeln nach der Theorie der Logarithmen um.

Zusatz 2. Weitere Erklärung durch praktische Uebungen auf dem Papiere und auf dem Felde.

Von dem Nivelliren.

106. Nivelliren (Libellatio) ist die Verfahrungsart, den Unterschied zwischen den Höhen zweier Punkte (ihr Gefälle) zu finden, deren Abstand bekannt oder gemessen ist.

Zusatz. Im Großen rechnet man den Abstand auf eine oder Meile, und das Nivelliren findet seine vorzügliche Anwendung in der Auffindung des Gefälles eines Flusses bei Anlegung von Mühlen, Wasserleitungen u. dgl.

107. Diese Aufgabe kann zwar schon aus der angegebenen Methode, Höhen zu messen (104.), gelöset werden. Allein dazwischenliegende Hügel und andere Hindernisse machen nicht selten die Anwendung derselben unmöglich. Daher sind andere Instrumente erfunden worden, welche überhaupt den Namen der Nivellirwage (libella) führen, und die horizontale Lage entweder durch ein Senkblei oder durch ein Flüßiges angeben, indem a) ein im Mittelpunkte eines Halbkreises oder an der Spitze eines gleichschenklichten Dreieckes aufgehangenes, und die Mitte des Bogens oder der Basis des Dreieckes abschneidendes Senkblei die Horizontalität des Durchmessers oder der Basis beweißt, und b) jedes Flüßige, sich selbst überlassen, eine horizontale Oberfläche annimmt.

108. Daher dient eine metallene an beiden Enden ungefähr in einen rechten Winkel umgebogene Röhre DCBA (Fig 75.), in welche die Glasröhren DF und AE eingekittet, und ungefähr bis HR mit Wasser gefüllt sind, zu diesem Zwecke. Da es aber sehr groß seyn muß, um genaue Dienste zu machen (Riccioli fordert wenigstens 12 Fuße), wodurch das Visiren von dem

Wasserspiegel der einen durch den der andern Röhre sehr beschwerlich wird.

Am besten bedient man sich einer mit Weingeist so gefüllten Glasröhre AB (Fig. 76.), daß noch eine Luftblase c in derselben bleibt, verbunden mit einem parallel unter und in der Achse der Glasröhre befestigten Fernrohre DE auf einem Stative; denn steht die eingeschlossene Luftblase in der Mitte der Weingeiströhre auf c, so beweiset sie die Horizontalität, indessen das Fernrohr die Arbeit für beträchtliche Entfernungen erleichtert.

109. Der Gebrauch dieser Instrumente ist nun leicht begreiflich. Wenn nämlich (Fig. 77.) der Höhenunterschied von C und B bestimmt werden soll, so theile man die Entfernung derselben in mehrere Theile, wenn sie sehr beträchtlich ist, z. B. in Cd, de, ea, aB. An jedem Theilungspunkte wird ein Stab mit einem beweglichen Zeichen, z. B. einem gemahlten Kreise oder Kreuze senkrecht befestiget.

Wenn dann die Nivellirwage po zwischen C und d horizontal aufgestellt ist, so visirt man nach C und d, und giebt den bei den Stäben stehenden Gehilfen Zeichen, damit sie das Kreuz oder den Kreis so lange verschieben, bis er in die Achse des Fernrohres (den Wasserspiegel) fällt. Die Höhen hc und id werden nun gemessen und aufgeschrieben. Eben so verfährt man auch zwischen d und e, zwischen e und a, zwischen a und B. Addirt man dann alle Beobachtungen nach der Linken zusammen, und eben so die Beobachtungen nach der Rechten, so giebt der Unterschied dieser Summen den Höhenunterschied zwischen C und B.

Zusatz. Wäre daher im Dezimalmaase

hC	= 4,37 Fuße und	id	= 8,22 Fuße
pd	= 7,28	lm	= 9,75
me	= 5,46	na	= 4,83
ra	= 2,20	sB	= 5,32
	19,31		28,12

so ist 28,12 — 19,31 = 8,81 Fuße der Unterschied der Höhen beider Punkte.

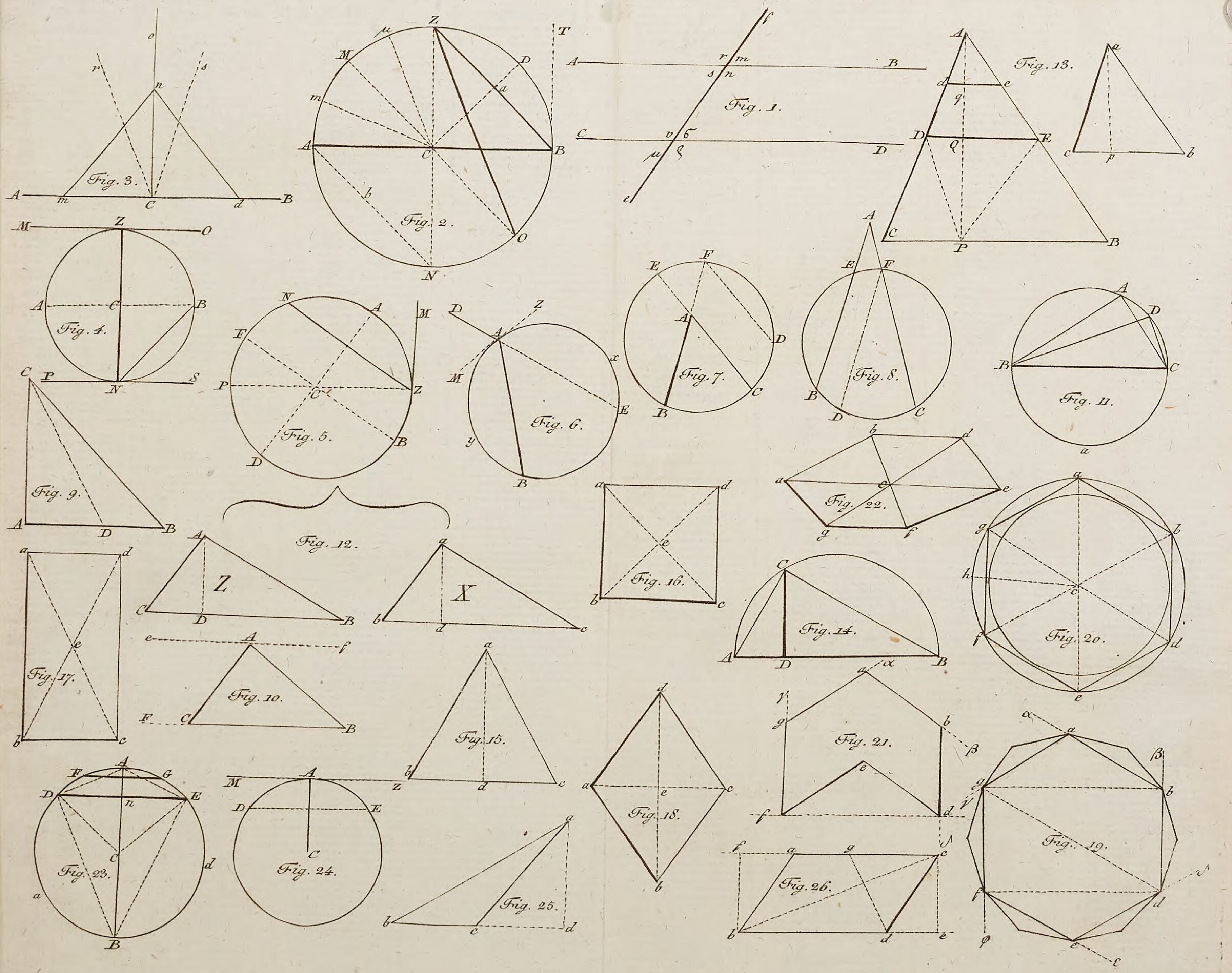

Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.

Tab. I.

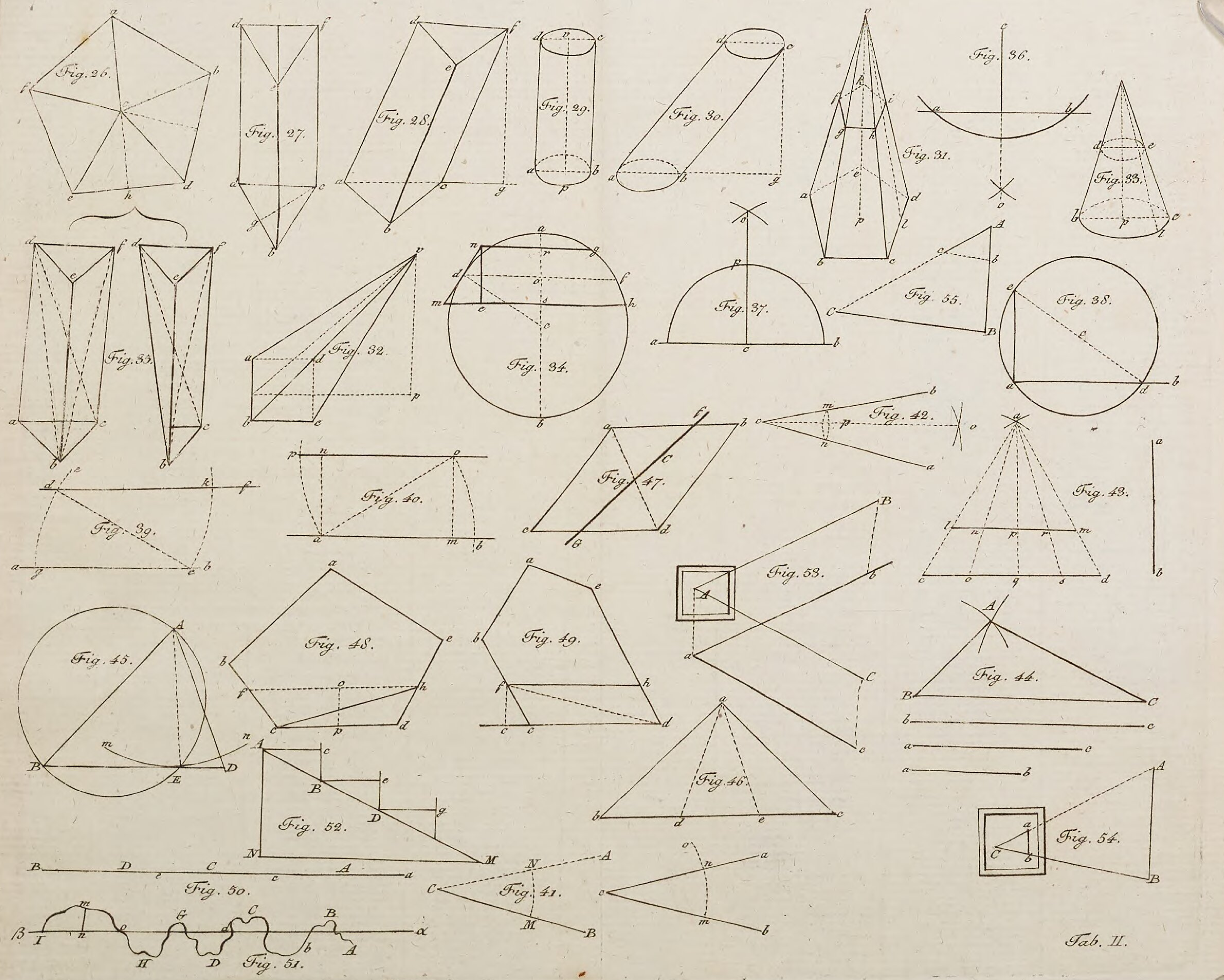
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 36.
Fig. 33.
Fig. 35.
Fig. 32.
Fig. 34.
Fig. 37.
Fig. 55.
Fig. 38.
Fig. 42.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 47.
Fig. 43.
Fig. 53.
Fig. 45.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 44.
Fig. 46.
Fig. 52.
Fig. 54.
Fig. 50.
Fig. 41.
Fig. 51.

Tab. II.

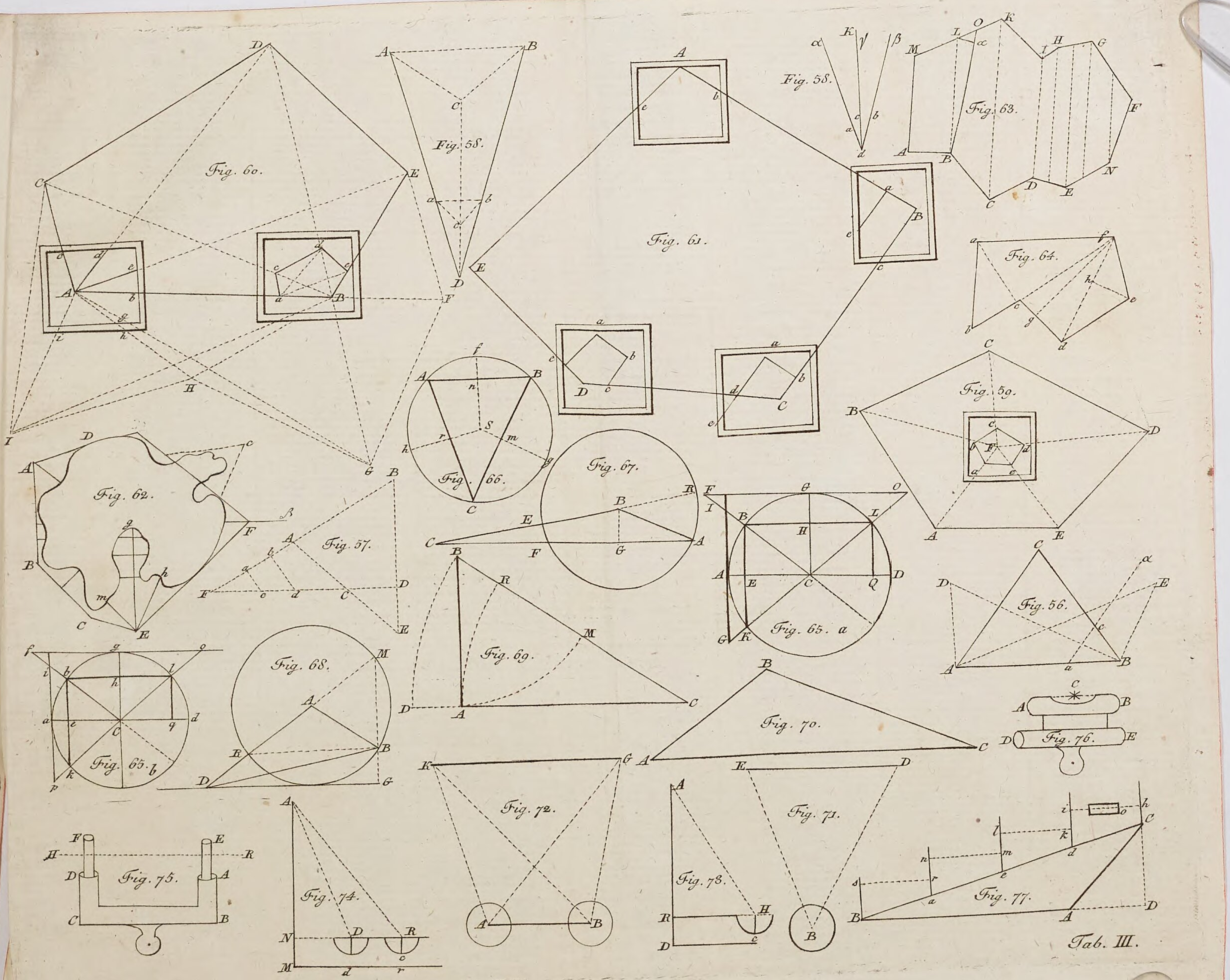
Fig. 60.
Fig. 58.
Fig. 61.
Fig. 58.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 59.
Fig. 62.
Fig. 57.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 65. a
Fig. 56.
Fig. 65. b
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 76.
Fig. 75.
Fig. 74.
Fig. 72.
Fig. 78.
Fig. 71.
Fig. 77.

Tab. III.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Siber, Thaddäus

Anfangsgründe der Algebra, Geometrie und Trigonometrie

Landshut 1819

Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.51
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11739757-5